

**ELEMENTI
D'ALGEBRA AD
USO DEL REAL
LICEO DEL
PROFESSORE...**

Pietro Franchini





B² 21. 2. 22.





ELEMENTI D' ALGEBRA

AD USO

DEL REAL LICEO

DEL PROFESSOR

PIETRO FRANCHINI

Revisore delle St. Accademia di Scienze, Napoli, Torino, &c.



L U C A

DALLA TIPOGRAFIA

DI FRANCESCO BELLINI

MDCCCLXIX



A SUA ECCELLENZA
AL SIG. CAFFARE
CONTE
BERNARDINO ORSETTI
DIRETTORE DEL R. LICEO

Sensibilissimo all'avventuroso rapporto che all' E. V. mi strinse quando vi degnaste di essere il primo oratore della mia Scuola analitica, ed eccitato sin d'allora da una divota

Spiegandomi verso l' amabilissima Per-
sona Vostra, sempre ho sospirato il
momento di potervi manifestare con
solenne attestato l' assoglia mia de-
ferenza; e Voi stesso, invitandomi a
comporre quel Po. Libro un Ele-
mento d' Algebra, mi avete offerto,
senz' averlo veduto, una bella occa-
sione per tributarvi quell' omaggio
che meritate.

Senza essere importuno all' am-
abile modestia che nobilmente vi adorna,
con rammentare quelle Doti che
nascondete a Voi stesso, dirò che vi

spetto nell' E. V. l' alta indole del
Sig. Conte Lelio Vostro Genitore,
che mi è tolta la candida ingenuità
del vostro cuore, che apprezza la de-
volezza del vostro spirito, le vostre
cognizioni e l'instancabile vostro zelo
a favore de' buoni studi, e compen-
derò tutti gli storgi dicendo, che nella
Spia fresca sta avete l'onore di pre-
siedere alla pubblica istruzione, e
godete l'invidiata stima di un' Al-
tezzabile SOVRANA.

Cominciando la carriera ov' altri
vol terminarla, Voi sprecate con la

*mincoi accupio la gioventù vostrana
ad sentiero dellar virtù, e fate que-
rare alla povera e nuda Filosofia
la protezione di Mecenate.*

*Sono con profonda ammirazione
Dell' E. V.*

Lucca 11. Novembre 1819.

Dalla Serv.^a Obbo

PIETRO FRANCHINI.

PREFAZIONE

La pubblicazione di questi Elementi, per ordine superiore quasi contemporaneamente composti nello spazio di due mesi, è in doppia guisa diretta a promuovere l'istruzione scientifica, agevolando cioè l'intelligenza dell'Algebra con un facile insegnamento, e procurando a tenue prezzo il testo delle annue lezioni. In ciò abbiamo procurato di combinare la chiarezza, la eleganza ed il rigore, ed è stato nostro scopo d'insinuare la teorica, destramente associandola a frequenti e piacevoli applicazioni;

metodo; che solo può provenire la noja incessante, e trarre util partito dalla curiosità giovanile, che ama la sorpresa e rifugge l'uniforme severità didascalica.

La trigonometria, a norma delle insinuazioni di Lagrange, vi è trattata coi soli mezzi dell' *Algebra elementare*, quasi senz' altro estraneo suicidio che quello del teorema Pitagorico; e ci lusinghiamo che nella sua semplicità debba esser grata a chiunque non è insensibile alla vivacità del genio analitico.

Anche la dottrina de' poligoni comparisce per la prima volta negli *Elementi*, ma non teme, attese le facili sue forme e la spontanea fecondità de' suoi principj, di farvi meno decante ed inopportuna comparsa. Dappertutto, non eccettuata

L'analisi semideterminata di primo grado, abbiamo avuto a cuore di avvalorare l'istruzione corredandola di scelti esempi, d'interessanti problemi, e di nuove indagini forse non disadornate nè inutili. Possa l'industrioso e docile gioventù Lucchese, valutando l'importanza del doppio incoraggiamento che riceve, mostrarsi non indegna dell'alta protezione che la circonda, e noi ci compiaceremo d'aver cooperato con uno straordinario sforzo al più rapido avanzamento di uno studio, ch'è fondamento di molte scienze, presidio e decoro d'ogni liberale disciplina.

LIBRO I.

—

TEORICA DELL' ALGEBRA ELEMENTARE

—

INTRODUZIONE

§. 1. **L'** ¹ *Algebra* insegna, ad usare con precisione e semplicità, per mezzo di poche segni combinati con le lettere dell'alfabeto, le operazioni che l'aritmetica esprimeva su i numeri, ed il passaggio da questo calcolo a quello, fu naturalmente suggerito da varie classi di questioni numeriche letteralmente simboleggiate, delle quali l'algebra occupa ci rimangono nelle Opere di Euclide e di Diofanto.

Nel suo più ampio significato l'algebra, altrimenti detta *analisi finita*, addottra a guida l'ingegno nella soluzione de' problemi proponibili sulla quantità, ed a quelli alcuni non di rado si estende, che al vero interessano la scienza naturale ed astratta, economia, economia politica, giurisprudenza ec. Vediamo intanto i tenui principj, da cui l'analisi finite quasi inevitabilmente deriva, per dilatarsi a guisa di quel fiume, e portare impetuoso tributo all'immenso Calcolo che l'infinitesimale si appella.

*Calcolo letterale e prime nozioni dell'analisi
finia.*

§ 1. Essendo a, b , quantità note, si è convenuto

I. Che $a+b, a-b, \left(\frac{a+b}{ab}, ab\right), (a+b, a)$

rispettivamente rappresentano la somma, la differenza, il prodotto, il quoziente, delle medesime, ed $a+b, a-b$ dicono *binomi* perchè due sono le sue parti (o termini) distinte con uno de' segni $+$, $-$. Così $a+b-c$ è un *trinomio* ecc. ed in esso il termine a si riguarda come positivo, il termine $-c$ come *negativo*. Polinomio è un'espressione composta di più termini. Si usa il simbolo $(a-b)(c-d)$ ed $a-b, c-d$ per significare il prodotto di $a-b$ per $c-d$.

II. Che il segno $=$ (eguale) indichi equivalenza: che un'espressione come $ax+bx+c$, diciasi equivalente ad $ax+b$ se sia il 1.^o membro, il monomio c il 2.^o

L'identità obliqua, o angolare l'equivale ad una viceversa, perchè un quadrato a^2 può bene equivalere ad un rettangolo bc , ma non mai coincidere con esso. Il segno $\doteq$, adoperata da Carnot e Gauss, si estende agli oggetti che possono sostituirsi gli uni agli altri, come un dato punto a e l'intersezione di due rette che in a s'incontrano.

III. Che scriva aa per $a+a$, $3a$ per $a+a+a$, ed in generale

na per $a+a+a \dots$ (n volte).

Come pure a^2 per aa , a^3 per aaa , ... ;
 a^n per $aaa \dots$ (n vol.) e perciò a^{n+1} in vece
 di a^n, a^n

Le cifre 1, 5, ... n dicono *coefficienti* nel
 $1.^{\circ}$ caso, *esponenti* nel $2.^{\circ}$

§. II. Volendo pervenire il sinceramento che
 ispirar vuole la molteplicità delle regole, e par-
 gere ai principianti una piacevole occasione
 d'istrarsi, suspendiamo la discussione teorica,
 e ci proponiamo alcuni facili quesiti.

Probl. 1.^o Il maestro ha 50 anni, se ha 16
 il suo allievo: quando l'età del 1.^o allievi dop-
 pio di quella del 2.^o? Soluz.^{ne} Chiamo x il
 n.^o degli anni che debbono passare sino al mo-
 mento richiesto, e veggia che se il n.^o x è giu-
 sto dov' essere

$$x(x+16) \text{ o sia } 2x+50x=50.$$

Siccome l'equivalenza di due quantità non si
 altera se l'una o l'altra egualianza si modifica
 con una stessa operazione tolga x da ambe le
 parti ed ho $x+16x=50$, e sottratto anche il
 n.^o 50 trovo $x=30$. Infatti 50+30, ossia 70, è
 il doppio di 36+30=56.

Probl. 2.^o Qual'è il prezzo di due perle che
 insieme valgono lire 586, e di cui la migliore
 ne costa 77 di più? Soluz.^{ne} Dato x il pre-
 zzo della 1.^a perla è $x+77$ quello della 2.^a ed
 $x+77+x$, ossia $2x+77$ dov' equivalere a 586.
 Si ha pertanto l'eq. $2x+77=586$, e non si trat-
 ta che di appurare il valore dell'incognita x ,
 per lo che bisogna lasciarla sola in uno de' due
 membri. A tale oggetto comincia dal sottrarre
 77 ed ho

$$2x(=586-77)=509:$$

diviso per 2 e trova $2544\frac{1}{2}$, n.° soddisfacente perchè $2544+77=2621\frac{1}{2}$ (prezzo della 1.ª parte) aggiunto a $254\frac{1}{2}$ (prezzo della 2.ª) dà 2876, e $2621\frac{1}{2}-254\frac{1}{2}$ è 77 come ec.

Probl. 3.ª Una società composta di un ignoto numero di persone si risolve di fare una splendida veglia di ballo, valutate 109 scellini, e per supplire alla spesa ciascuno ne depone due, con la condizione che la metà de' nuovi contribuenti da inchiusi, debba essere impiegata in pagamento della loro. Si sa che il numero de' contribuenti addetti è stato un terzo di quello de' soci più due, e che la spesa de' soci x è così ridotta ad uno scellino. Si domanda il numero degli uni e degli altri. Soluz.^{ne} Sia x il n.° de' soci e sarà $\frac{1}{2}x+2$ quella de' contribuenti; ma per ipotesi la somma delle due parti

d' x^{soc} , e $(\frac{1}{2}x+2)^{con}$, dev'esser uguale a 109 : dunque

$$x+\frac{1}{2}x+4=109.$$

La moltiplicazione per 2 dell'uno e dell'altro membro, giurando a distruggere il denominatore della frazione, dà questa

$$2x+5x+4=218 \text{ ossia } 7x+4=218$$

Quindi $7x+4=218$, $7x=218-4=214$ ed $x=\frac{214}{7}=30\frac{2}{7}$, n.° de' soci; $\frac{15}{7}+2=23\frac{2}{7}$, n.° de' con-

tribuenti. Infatti $1. 30\frac{2}{7}+23\frac{2}{7}=109$ come ec.

Probl. 4.ª Due capitalisti negoziano insieme il valente di 45 mila lire: uno ha guadagnato con false speculazioni il 20%, l'altro il valore del suo capitale: la perdita di tutti e due essendo di 11 mila lire, cercasi quanto fosse in origine il capitale di ciascuno. Soluz.^{ne} Detto x il co-

parte del 1.^o negoziante, la sua perdita è $\frac{3}{4}x$, quella del 2.^o $\frac{45000-x}{4}$, e dieci anni

$$\frac{3}{4}x + \frac{45000-x}{4} = 11000.$$

Tutti i denominatori mediante la moltiplicazione per 4=5 si riduce

$$3x + 115000 - 4x = 44000$$

e sottratte 115000 dai due membri, dopo la riduzione di $3x - 4x = -x$, ottenesi $x = 115000$, eq. che divisa per 4 dà 2875000. I capitali richiesti sono dunque

2875000 e $45000 - 2875000$ ossia 3000 lire.

§ 4. La traccia che abbiamo seguita, siccome indipendente dal particolare valore de' n negoziati, opportunamente si adatte ad un linguaggio geometrico mediante la sostituzione delle lettere di numeri.

Ma E l'età del maestro, e quella dello scolare, m il moltiplice della a , a cui vuole ridotta la x , e si avrà

$$m(x+x) \text{ ossia } mx+mx=E+x,$$

e tolte x , indi mx , risulta $mx+mx-E-x$, ossia $(m-1)mx=E-mx$, eq. che divisa per $m-1$

dà la soluzione generale $x = \frac{E-mx}{m-1} \dots (2)$

Questa, facendo $E=52$, $m=15$ ed ancora riproducendo, così è naturale, la soluzione del problema 1.^o: dimostra che la possibilità del quoziente suppone $E > mx$, e presenta nella espressione

$\frac{E-mx}{m-1}$ il sistema delle operazioni che si debbono

fare sulle quantità date per ottenere in ogni caso la bramata soluzione. Tal sistema diretti far-

modi, e qualora sia semplice porge la regola per risolvere tutti i quesiti della medesima specie.

L'analisi fatta ha dunque l'inestimabil pregio di assegnare i limiti che circoscrivono la possibilità del problema, e di compendiarlo in una formula tutte le particolari relazioni del medesimo.

Una formula prende il nome di *funzione* quando si considera per rapporto ad una o più quantità in sua compres. Così

ax^2 , $5x-4b$, sono funzioni d' x ;
 x^2+xy , y^2+ax+b , sono funzioni d' x e d' y .

§ 5. Per trattare il 1.^o problema come l'antico, diamo x la somma de' prezzi, d la loro differenza, e l'eq. $ax+yy=585$ divida $ax+td=585$. Tolta d resta $ax+td-d$, e fatta la divisione per a si ha $x=\frac{1}{a}(585-d)=\frac{1}{a}585-\frac{1}{a}d$.

Il prezzo maggiore $x+d$ è dunque $\frac{1}{a}585+\frac{1}{a}d$ o sia $\frac{1}{a}(585+d)$.

La formula $(x=\frac{1}{a}(585-d), x+d=\frac{1}{a}(585+d)) \dots (5)$ insegna che il maggiore di due n de' quali sia data la somma e la differenza, è uguale alla semisomma più la semidifferenza, il minore alla semisomma meno la semidifferenza.

Si vede per incanto la soluzione generale de' problemi 3.^o e 4.^o

§ 6. Procedendo da ogni accidentale modificazione, il metodo analitico che ci ha guidati nelle soluzioni antecedenti è uniforme, e basta esprimersi il significato con le piccole parole di sempre una stessa norma per tutti i problemi di 1.^o grado.

Regola generale. Espressi l'incognito con un indeterminato simbolo, che sull'essere una delle altre lettere dell'alfabeto, (u , v , y , z), si

facciamo su di esso le operazioni che si farebbero per verificare il n.° cercato, qualora si potesse numerare di conoscerlo, ed otteniamo così l'eq. del problema, d'onde non si tratterà che di liberare l'incognita dalle quantità che la modificano, per lo che si richiederanno e basteranno le operazioni contrarie a quelle da cui essa è modificata.

§ 7. Ad oggetto però di prevenire ogni pericolo d'errore fa d'uopo notare

I. Che per sottrarre una quantità negativa la si dà il segno +. La ragione si è che quando dal n.° 12 si vuol sottrarre $5-3$, vale a dire che si cerca $12-(5-3)$, scrivendo $12-5$ cioè 7, si ha una differenza minore del vero, il cui difetto 3, o $3'$ che si sarebbe dovuto togliere da 5, si compensa aggiungendo 3 a $12-5$, il che dà

$$12-(5-3)=12-5+3=10;$$

e tal difetto sottraddo da 5 e di -3 , d'altronde legittimo, si rende opportuno aver tratti si di sottrarre una quantità della forma $b-c$, che non può esser nota in generale come lo è $5-3$, e si scrive

$$a-(b-c)=a-b+c;$$

Che si conferma con una prova di fatto, mediante l'addizione di c si ad a che a $b-c$, [il che non altera la differenza $a-(b-c)$] poiché ne presiede

$$a+c-(b-c+c) \text{ ossia } a+c-b.$$

II. Che $ac-bd=d(-c)-d(-a)$. Infatti, per ridare il prodotto $a(b-d)$ alla sua più precisa indicazione altro non può farsi che moltiplicare a prima per c , indi per $-d$, e viceversa ac equale ad a prima c volte, mentre dev'ess. prendersi il valore di meno, si dividano or del prodotto ad , scrivendo $ac-ad$.

Per verificare la 2.^a regola ricordiamoci che ad $a+b$ la $(c-d)(c-d)$ deducasi $b(c-d)$,
 $bc-bd=(a+b)c-(a+b)d=ac-bc-(ad-bd)$;
 e poiché poi n.^o I. $-(ad-bd)=ad+bd$,
 si vede essere $(c-d)(c-d)=ac-bc-ad+bd$
 cioè $=b(c-d)+ad+bd$.

III. Che il quoziente $\frac{a}{b}$ è $-\frac{a}{-b}$ o $-\frac{a}{b}$,
 altrimenti la moltiplicazione del divisore pel
 quoziente non riprodurrebbe il dividendo. Ca-
 si $\frac{-a}{-b}=a$.

§. 8. Altro adesso non ci resta che applicare
 la precedente regola e quelle del §. 6. n.^o III.
 alla moltiplicazione ed alla divisione di un po-
 linomio per un altro.

La definitiva indicazione del prodotto di due
 polinomi si ottiene moltiplicando ciascun termi-
 ne del 1.^o per ciascuno dell'altro, e per ciò ba-
 sta saper moltiplicar due monomi fra loro come
 $aa^2b^3, 3a^2b^2=3a^3a^2b^2b^2=3a^{2+2}b^{2+2}=3a^4b^4$.
 Il prodotto totale P risulta composto di un n.^o
 di termini, eguale alla somma di quelli del mul-
 tiplicando M e del moltiplicatore m .

$$\begin{array}{r} \text{Esemp. 1.}^o \quad 3a^2+ax+2=3a^2 \dots\dots\dots M \\ \quad \quad \quad x^2-4ax \dots\dots\dots m \\ \hline 3a^2+ax+2=3a^2x^2 \dots\dots\dots p_1 \\ \quad \quad \quad -4ax^2-8a^2x^2+10a^2x \dots\dots p_2 \\ \hline 3a^2x^2-10a^2x^2+10a^2x^2+10a^2x \dots\dots P \end{array}$$

dove il trinomio p_1 è $-ax^2M$, $p_2=4ax.M$.
 I termini $10a^2x^2$, $10a^2x$, come pure $3a^2x^2$, $8a^2x^2$,
 si chiamano simili perchè contengono le stesse
 lettere, e questo affetto dagli stessi esponenti. La
 rispettiva somma o sottrazione dei medesimi di-
 cesi riduzione e così non si trascura.

$$\begin{array}{r}
 \text{Esempl. 1.}^o \quad a - ab + 3c \quad \dots \dots \dots M \\
 \underline{aa + ab - 3c} \quad \dots \dots \dots m \\
 aa^2 - (ab + 3c) \\
 \quad + ab \quad \quad - 3b^2 + ab + 3c \quad \dots \dots P_1 \\
 \quad \quad - 3ac \quad \quad + 3ab - 3c \quad \dots \dots P_2 \\
 \underline{aa^2 - 3ac - 3b^2 + ab + 3c} \dots P
 \end{array}$$

§. 2. Anche la divisione di un polinomio per un altro dipende da quella di due monomi, come

$$6a^3b^2c \div 3ab^2c = \frac{6a^3b^2c}{3ab^2c} = \frac{aa^2b^2c}{ab^2c} = aa^2b^2c \cdot \frac{a}{a}$$

è questa la divisione semplice. Nella divisione composta si suppone che il dividendo e il divisore abbiano qualche lettera comune, e che i termini dell'uno o dell'altro sieno disposti secondo l'ordine degli esponenti di una stessa lettera, cominciando dall'esponente massimo.

Divis. ^o	Divid. ^o	Quoziente
Esempl. 1. ^o $a-b$	$aa^2 - 3ab + 3b^2$	$aa - 3b$
	$-(aa - ab)$	$\frac{aa^2}{a}$ Operazione
	$-3ab + 3b^2$	$\frac{-3ab}{a}$ rest. com. $a = ab$
	$-(3ab + 3b^2)$	$\frac{aa^2 - 3ab}{a} = aa - 3b$
	$0 \quad 0$	$\frac{-3ab + 3b^2}{a} = -3b + 3b$

Divis.	Divid.	Quoz.
Esempl. 2. ^o $3x-2$	$3x^3 + (9x-2)x^2 - 6x + 56$	x^2
	$-3x^3$	$+30x^2$
	$9x^2 - 6x + 56$	-47
	$-9x^2 + 6x$	$+ \frac{56}{3x-2}$
	$3x + 56$	
	$+6x - 54$	
	$+3$	

	Diviso		Quoziente
Es. 5. ^a	$x^3 + 5x^2 + 4x$	$x^3 + 5x^2 + 4x - 5x - 5x - 5x$	x^2
		$-5x^2 - 5x^2 - 5x^2$	
		$x^2 - 5x - 5x$	$+5$
		$-5x^2 - 5x - 5x$	
		$+5x^2 + 10x + 5x$	-5
		$0 \quad 0 \quad 0$	

§. 10. Si è veduto (§. 101.) che il quoziente di un termine per un altro, che sia composto delle stesse lettere, si ottiene con *prefiggere* alle lettere la *differenza* de' rispettivi esponenti, mentre loro si *prefigge* la *somma* (§. 10. n.° III.) ad *ai* causa di moltiplicarli. E chiaro infatti che siccome $\frac{a^p}{a^q} = \frac{a^p}{a^q} \cdot a^0 = a^{p-q} a^0$, così darà avere

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}.$$

Ma se $m < n$, e in $m-n$ si porrà $-m+p$, qual sarà il significato del rispettivo moltiplicando

$$a^{m-n} = a^0, \quad a^{m-(m+p)} = a^0 - p = a^{-p}.$$

Risponde che nel 1.^o caso è $a^0 = \frac{a^p}{a^p} = 1$:

$$\text{Che nel 2.^o è } a^{-p} = \frac{a^m}{a^{m+p}} = \frac{a^m}{a^m \cdot a^p} = \frac{a^m}{a^m} \cdot \frac{1}{a^p} = \frac{1}{a^p}.$$

Si può dunque stabilire che $\frac{a^m}{a^n}$ equivale ad

a^{m+n} perchè si esprime che a^n esprime l'unità
 di a che a^p sia $= \frac{1}{a^q}$.

C A P I T O L O II.

*Adattare le frazioni che della loro somma
 alla più semplice espressione.*

§. 11. La difficoltà che s'incontra nel conce-
 pere il valore di una frazione composta e nell'ap-
 plicare ad essa le note regole del calcolo aritme-
 tico, ha consigliata la ricerca del massimo fis-
 tore contenute ne' suoi termini, qual'è per esem-
 pio 15 per rapporto alla frazione

$$\frac{145}{637} = \frac{11 \cdot 13}{49 \cdot 13} = \frac{11}{49}, \text{ ed}$$

$$a^2 + b^2 = \frac{a^2 + ab^2}{a^2b + b^3} = \frac{a(a^2 + b^2)}{b(a^2 + b^2)} = \frac{a}{b},$$

poichè tagliando con la divisione il fattore co-
 mune, resta una frazione equivalente, detta
 della massima semplicità. Dico il numero mag-
 giore A pel minore B , dove per termini s'in-
 tendono il numeratore ed il denominatore, se
 aliquoti.

$$\frac{A}{B} = q + \frac{r}{B} \text{ e però } A = qB + r \text{ ed } A = qB + r,$$

è chiaro che il a^n a, massimo divisore di A e B ,
 dee dividere il residuo r , altrimenti l'intero
 $\frac{A - qB}{r}$ risulterebbe uguale al tutto $\frac{r}{r}$, il che
 contraddice. Si tratta dunque di ritrova-

che x in $\frac{r}{B}$, frazione non composta di $\frac{A}{B}$ perchè (Arithm.) $r < B$: nè può supponersi che r, B ammettano un divisore $h > 1$, perchè risulterebbe $h(\text{mq}B - r)$ divisibile per h , e x non sarebbe il massimo fattore in A e B contro l'ipotesi.

Sia $\frac{B}{r} = \text{mq}_1 + \frac{r_1}{r}$, cioè $B = \text{mq}_1 r + r_1$ e $B = \text{q}_1 r + r_1$, e si vedrà che x non può dividere B ed r senza che divida r_1 : siamo dunque ridotti ad appurare x in $\frac{r_1}{r}$, tutta più semplice di $\frac{r}{B}$ perchè $r_1 < r$.

Se proseguendo si giunge ad un residuo vaneggiante per esempio $\frac{r}{r_1} = \text{q}_2$, ovvero $\frac{r_1}{r_2} = \text{q}_3$, ecc. si ha $r = r_1$ nel 1.° caso, $r = r_2$ nel 2.°, ecc. Infatti, un $n.^\circ > r_2$ non divide r ed r_1 , un $n.^\circ > r_1$ non divide r_1 ed r_2 e così via, ed un $n.^\circ < r_1$ non sarebbe il massimo divisore di r ed r_1 ; un $n.^\circ < r_2$ non sarebbe il massimo di r_1 ed r_2 , e così in seguito.

L'ultimo divisore tutto è uno quando la frazione sia irriducibile.

Esemp. 1.° Volendosi la minima frazione equivalente a $\frac{143}{637}$ si opera come appresso:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{637}{143} = 4 + \frac{65}{143}, \quad 637 = 4 \cdot 143 + 65 \\ \frac{143}{65} = 2 + \frac{13}{65}, \quad 143 = 2 \cdot 65 + 13 \\ \frac{65}{13} = 5, \quad 65 = 5 \cdot 13 \end{array} \right.$$

e 15, massimo divisore di $\frac{65}{15}$ cioè di 15 e 65, è il massimo divisore di $155=5 \cdot 15+15$ e 15 , come pure di $455=4 \cdot 15+5$ e 15 e 45 .

Un a > 15 non avrebbe potuto dividere il residuo 15 derivato dalla a ° divisione.

Esemp. 2.° Sia data la frazione

$$\frac{6a^3 - 6a^2b + 1ab^2 - 6b^3}{4a^2 - 5ab + b^2}$$

Per rendere eseguibile la divisione di $6a^3$ per $4a^2$ moltiplico il dividendo per 3, numero che non avendo comune ai termini del divisore non può aver parte nel fattor massimo che si cerca. Tranne il residuo $3a^3b + ab^2 - 6b^3$ soppresso b per la ragione addotta, e divido

$$3(4a^2 - 5ab + b^2) \text{ per } 3a^3 + ab - 6b^2 \text{ (*)}$$

Il quoziente è 4, il residuo $15b(b-a)$, e rappresenta $15b$ resto da dividere

$$3a^3 + ab - 6b^2 \text{ per } -a+b;$$

e siccome va viene il quoziente anche

$-3a-4b$ di $3a^3 - a^2b - a + b$, e la proposta si riduce a

$$\frac{3b^3 + 6a^3}{4a - b}$$

Si domanda il massimo divisore per cui torni la frazione

$$\frac{3a^3 - 3a^2b + 1ab^2 - 6b^3}{7a^2 - 5ab + 6b^2} \dots$$

si riduce a
$$\frac{6a^3 - 3ab^2 + ab^3}{7a - ab}$$

§. 12. Anche la somma delle frazioni può essere ottenuta sotto una forma che sia la più

(*) E' evidente che si avrebbe lo stesso nel dividere e nel dividere di più dividere $3(4a^2 - 5ab + b^2)$ per $4a^3 - 5ab - 6b^2$.

semplice, e giace molto ristretta la direttissima, poichè si rende più spedita la riduzione al medesimo denominatore, e si evita la necessità di applicare alla stessa il pedioso metodo del minimo comune divisore.

Volendo per esempio $\frac{1}{2} + \frac{1}{3}$, decompo $6(-a, 3)$ contiene il denominatore $\frac{1}{2}$, moltiplico i termini della 1.^a frazione per 3 ed ho

$$\frac{3+5}{6} = \frac{3}{6} + \frac{5}{6}.$$

Se debbano sommare $\frac{1}{3}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{1}{12}$.

Essendo $6(-a, 3)$, $12(-a, 2, 3)$, moltiplico i termini di $\frac{1}{3}$ per 4, quelli di $\frac{5}{6}$ per 2, e trovo

$$\frac{8}{12} + \frac{10}{12} + \frac{1}{12} = \frac{19}{12} = 1 + \frac{7}{12}.$$

Se la somma richiesta sia

$$\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{2}{7} + \frac{3}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \frac{1}{12}$$

trovo i fattori di tutti i denominatori, ed avendo riconosciuto che sono

$$2, 3, 5, 3, 5, 5, 7, 11,$$

osservo che i termini delle successive frazioni si debbono rispettivamente moltiplicare per

$2, 2, 3, 5, 7, 11$; $3, 2, 5, 7, 11$; $2, 2, 2, 3, 5, 11$;

$3, 3, 5, 7, 11$, *cc.* Fatta l'operazione si ottiene la ri-

chiesta somma $\frac{28671}{27720} = 1 + \frac{1081}{27720}$ (*)

Basta dunque moltiplicare i termini di ciascuna frazione pel prodotto de' fattori comuni con-

(*) Il metodo ordinato al quesito dato, mediante un calcolo

intempestivo $\frac{28671}{27720}$
applicato

posanti i denominatori delle altre, e che non si trovano nel denominatore di quella in cui si opera.

Tuttavolta di frizioni letterali l'espressione è più facile. Vogliamo per esempio sommare le

$$\text{frizioni} \quad \frac{a}{b^2c} + \frac{c}{b^2g} + \frac{d}{f^2h}$$

Gli elementi del denominatori essendo b, b, f, c, h , si moltiplicheranno i termini della 1.^a per gh , quelli della 2.^a per gh , della 3.^a per b^2g e si otterrà

$$\frac{agb + bgh + b^2dg}{b^2fgh}$$

§. 13 Si prova come nell'Arithmetica che

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd} \quad \text{ed} \quad \frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}$$

CAPITOLO III.

Combinazioni e permutazioni.

§. 14 Quando si ha un certo num.^o di elementi, che sieno per esempio carte da gioco, lettere, numeri ec. si può supporre e talvolta succede, ch'essi semplicemente consistano a due per due, e a tre per tre ec. come le carte in mano del giocatore, ed i num.ⁱ de' biglietti nel gioco del lotto; non di rado avviene che si debbono sommare insieme, il che si verifica quando si accammina di fare un certo punto gettando un dado due volte, ovvero gettandolo tre, ec. e quindi si rende necessaria il sapere quanti sieno i prodotti binari, ovvero i ternari, ec. di un dato numero di quantità. Tali accostamenti diconsi *combinazioni*, e prendono il nome di *permutazioni* se in esse varia l'ordine in tutte le maniere possibili.

Le combinazioni binarie degli elementi a, b, c , se si considerino nel triplice significato sopra espresso, sono

$$\begin{array}{ccc} a, b; & a, c; & b, c; \\ a+ab; & a+ac; & b+bc; \\ ab; & ac; & bc; \end{array}$$

ed anche aumentando la ripetizione di uno stesso elemento, il numero dei risultati è uguale in ciascuna delle tre ipotesi. Permutando tra loro le lettere in ab, ac, bc , si ottiene

$$ab, ba; ac, ca; bc, cb; \text{ ossia}$$

$$a(b, c), b(a, c), c(a, b);$$

e se gli elementi sono quattro

$$a(b, c, d), b(a, c, d), c(a, b, d), d(a, b, c).$$

Il numero degli elementi avendo m , alla sinistra di ciascuno si collocano tutti gli altri $m-1$ e si formano m classi, ciascuna delle quali comprende $m-1$ accostamenti; perciò il numero delle permutazioni binarie è generalmente $m(m-1)$. Per formare le permutazioni ternarie scrivendo alla sinistra di a le permutazioni binarie fra b, c, d ecc. alla sinistra di b le permutazioni come sopra fra gli elementi a, c, d ecc. e così fino al $m-1$ elemento, il che equivale a prendere m volte le permutazioni binarie fra $m-1$ elementi, permutandosi il cui numero è $(m-1)(m-1)$; per conseguenza quello che si cerca è $m(m-1)(m-1)$. Ecco il tipo dell'operazione. Fra tre elementi

$$a(b, ab), b(ac, ba), c(ab, ba), \text{ ossia } 3, 2, 2 \text{ accost. (*)}$$

Fra quattro elementi sono 4 $3, 2, 2, 2$, cioè

$$a(b, ba, ab, ba) \quad b(ac, ca, ab, ba) \\ c(ab, ba, ac, bc) \quad d(ac, ad, cd, da)$$

(*) In due elementi si accostano quelli, per esempio a, c , b, c , le permutazioni di ciascuno a tre $a, a, b, c, a, c, b, c, b, c, c, c$...

$$\begin{pmatrix} ab, ad, ba \\ ba, da, ab \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} ab, ac, ba \\ ba, ca, ab \end{pmatrix}$$

Per cinque elementi

$$\begin{aligned} & a \begin{pmatrix} ba, bc, ca, ad, ac, da \\ ab, ac, cb, da, ca, ad \end{pmatrix}, \\ & b \begin{pmatrix} ac, ad, da, cb, ca, da \\ ca, da, ca, da, ac, ad \end{pmatrix}, \\ & c, c, c. \end{aligned}$$

Nel 3.^o esempio ogni classe comprende 12 asserimenti e le classi sono cinque: le tutte 5.4.3=60 asserimenti.

Si formano le permutazioni quaternarie situando alla sinistra di ciascun elemento le permutazioni ternarie fra tutti gli altri $m-1$ elementi, permutazioni il cui n.^o è $(m-1)(m-2)(m-3)$, e perciò si ha $m(m-1)(m-2)(m-3)$; e perchè l'equiva derivazione manifestamente si estende alle permutazioni di qualsivoglia ordine n , come si può stabilire che il numero di tutti gli asserimenti possibili fra m elementi posti n alla volta è $m(m-1)(m-2) \dots [m-(n-1)] \dots (1)$

§. 15. Se ciascuno elemento può ripetersi, il numero $m(m-1)$ deve aggiungersi m , perchè altrettanto sono le coppie $a+ab$, $b+ab$ ecc. altrettanto i prodotti aa , bb ecc., ed il numero delle permutazioni binarie diviene $m(m-1)+m$ ossia m^2 .

Si passa nella stessa ipotesi alle permutazioni ternarie, collocando ciascuno degli m elementi alla sinistra di ciascuna permutazione binaria, e ciò produce $m.m^2=m^3$. In generale, se gli elementi possono ripetersi fino ad n volte, il total numero delle permutazioni è m^n . Così il numero dei casi che possono darsi quando si getta due volte un dado è $=6^2$ ossia 36, dove 6 è il numero dei punti indicati dalla su faccia del da-

dei casi che, non computando i numeri ripetuti, comprendono undici punti tra loro diversi, e sono $a, b, c, d, \dots, i, j$. Il numero de' casi ammissibili è $6^4 = 1296$ se si vuole si gettino sei volte.

§ 26. Siccome le permutazioni binarie, contengono ab e ba , ac e ca , bc e cb ecc. il loro numero è doppio delle combinazioni analoghe: perciò quella delle combinazioni di n elementi presi a due per due, risulta $= \frac{n(n-1)}{2}$.

Tra le permutazioni ternarie trovati abc , acb , bac , cab , cba , bca ; cioè $6(n-2)$ espressioni relativi ad a, b, c ; altrettanto ad a, b, d , ecc. Dunque il numero delle combinazioni di sei sopra, risulterà per $\frac{n(n-1)(n-2)}{2 \cdot 3}$. Si vedrà

che nella permutazione quaternaria ogni combinazione è ripetuta $n(n-2 \cdot 3 \cdot 4)$ volte, e proseguendo si concluderà che n elementi presi n alla volta, danno

$$\frac{n(n-1)(n-2) \dots [n-(n-1)]}{n \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n} \text{ combinazioni.} \quad (c)$$

formula d' ora, quando ciascun elemento può ripetersi fino ad n volte, si dee sostituire

$$\frac{n(n+n-1)(n+n-2) \dots [n+n-(n-1)]}{n \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n} \quad (d)$$

Per esempio se gli elementi dati sono a, b, c , si hanno le seguenti combinazioni ternarie contenenti le ripetizioni:

$aaa, a^2b, a^2c, b^2a, b^2c, c^2a, c^2b, a^3, b^3, c^3$, e la formula (d) si riduce a

$$\frac{3(3+1)(3+1)}{2 \cdot 3} = 6, \text{ come ecc.}$$

Si hanno sei palle in un'urna e ciascuna porta impressa una delle prime sei cifre non ripetute. Posto che si estraggono tre palle rimescolate,

25

do ad ogni situazione la pelle estratta nell'arco,
quanti sono i diversi casi che possono darvi?

La fonction ψ de $\frac{G}{H} = 54$

§. 17. Si domanda il numero degli scabbi e quello de' termi, che possono formarsi col 30 numeri del giuoco del lotto. Risponde

$$\begin{aligned} \log(m-1) &= \log 89 = 45 \quad 89 = 49 \times 5 \dots \text{unfit} \\ \log(m-1)^2 &= \log 7921 = 895 \quad 7921 = 11 \times 189 \dots \text{unfit} \end{aligned}$$

§ 18. Cettante un dato tre volte si possono fare solci punti diversi, cioè 3, 4, 5, 6, . . . 18; le combinazioni sono, come nel problema dell'urna, 56; le permutazioni (18) sono $18! (=6^3)$, e restituiscono altrettanti distinti casi da contemplarsi: d'altronde non erri che un solo caso favorevole ai punti 3, 18: dunque alcuni punti debbono succedere in più maniere, e può darsi che una sia più probabile di tutti gli altri. Conchiama di verificare questa congettura, formando un metacubo prospettico di tutti i casi, prospetto la cui coditura dipende dal n.° delle combinazioni fra tre elementi nelle due ipotesi 1.° che sono diversi; 2.° che due sono eguali (§. 14 Esmp. 1.° Nota)

[illegible]

Siccome le sette colonne che restano danno con ordine retrogrado lo stesso rispettivo n.° di casi corrispondenti alle cifre 9, 8 ecc., i punti della massima probabilità esistono a una 10, 11; perciò la scommessa su i medesimi è più vantaggiosa, ed il vantaggio cresce quanto più sia piccola il n.° scelto per la scommessa contraria (*).

§. 19. Volendo il n.° delle combinazioni di m elementi, presi $m-n$ alla volta, si sostituisce $m-n$ per n in (d) (e) e si ha

$$\frac{m(m-1)(m-2) \dots (m-n+1)(m-n)}{1.2 \dots (m-n)} \dots (f)$$

Ma l'eq. $\frac{m(m-1) \dots (m-n+1)}{1.2 \dots n} \frac{m(m-1) \dots (m-n)}{1.2 \dots (m-n)}$

fatta la riduzione si può anche dimostrare, scambiando le funzioni identiche

$$\frac{1.2 \dots (m-n)(m-n+1) \dots (m-1)m}{1.2 \dots n(n+1) \dots (m-1)m}$$

Dunque il numero delle combinazioni tra m elementi presi n alla volta coincide con quello che si ottiene prendendone $m-n$. Ciò serve a giuocare ad abbreviar di molto l'operazione. Se dimandassi per esempio in quante maniere 15 elementi possono combinarsi prendendone 15, si applica la

formula $\frac{15.14}{1} = 15.7 = 105$. Infatti ogni combinazione di 15 elementi ne produce una di due.

Ciascuna delle formule (d), (f) (a piacere la più comoda) insegna in quante maniere m elementi si possono spartire fra due persone in guisa, che una ne abbia n , l'altra $m-n$. Gli

(*) Si ha una legge di giocare non costante, ed è permesso di prendere un n.° qualunque, anche tutto. Una scommessa per sempre, l'altro per poi. Gli due ha la maggior speranza di vincere? Risposta, il primo, ma se durante la stagione.

elementi siano per esempio 10 carte da gioco ed uno debb'averne sette, l'altre tre, ed i casi possibili saranno $\frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{1 \cdot 2} = 5 \cdot 8 = 40$.

§. 20. Le suddette formule servono altresì di sorta nella ricerca di tutti i divisori semplici e composti, di un n.° che di una funzione letterale, nell'ipotesi però che i divisori semplici siano tutti fra loro diversi, poichè da esse si raccolgono quanti essi debbano i divisori doppi, quasi i divisori tripli, ec. Le medesime danno anche una formula esprimevole il n.° di tutti, non esclus i divisori semplici ed il prodotto di tutti, e tal formula è $(1+1)^m - 1 = 2^m - 1$, verità di cui per altro non possiamo presentemente assicurarci che per mezzo dell'induzione, facendo successivamente $m=2, 3, 4$ ec. nell'eq.

$$\frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} + \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots + \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2} + \frac{m(m-1)}{1} + m + 1 = 2^m - 1,$$

dove il 1.° membro faisce col n.° termini quando $m=2$, col 3.° quando $m=3$, ec.

Il n.° $2^m - 1$ coincide con quello de' termini di $(1+a_1)(1+a_2)(1+a_3) \dots (1+a_m) - 1$ ed in questa funzione restano implicitamente compresi tutte le combinazioni di cui si tratta. Si ha per esempio $(1+a_1)(1+a_2)(1+a_3) - 1 = a_1 + a_2 + a_3 + a_1a_2 + a_1a_3 + a_2a_3 + a_1a_2a_3$.

§. 21. Per supplire alle formule (a), (c'), che divergono insufficienti quando alcuni elementi sono eguali, proponiamo per le combinazioni dei rispettivi ordini, 0, 1, 2, 3, le seguenti:
Sia $m=n+p$, dove n esprime un dato n.° di

elementi diversi, p un n.° di elementi eguali ad uno degli n , contchè se abbiamo a, a, a, b, c , ma $a=5, p=2$.

I. Essendo p qualunque, il n.° delle combinazioni binarie è $= \frac{n(n-1)}{2} + 1$.

II. Quella delle ternarie, nelle rispettive ipotesi di $p=1, p=2$, viene espressa per

$$\frac{n(n-1)(n-2)}{3 \cdot 2} + 1 + 1; \quad \frac{n(n-1)(n-2)}{3 \cdot 2} + 2.$$

III. Il numero delle quaternarie è

$$\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4 \cdot 3 \cdot 2} + \frac{(n-1)(n-2)}{2} \quad \text{se } p=1$$

$$\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4 \cdot 3 \cdot 2} + \frac{n(n-1)}{2} \quad \text{se } p=2$$

$$\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4 \cdot 3 \cdot 2} + \frac{n(n-1)+2}{2} \quad \text{se } p>2.$$

§. 22. Ricordi all'indietro rievagliamoci d'una quantità composta, numerica o letterale, ne' suoi fattori.

Trovandosi da un num.° si cerchi nella tavola il minimo suo divisore: notata il quoziente procedi alla ricerca del nuovo divisore minimo, e così via. De' divisori suddetti e dell'ultimo quoziente si formino i prodotti di tutti gli ordini e si avrà etc. Sia per esempio 35585.

Div. min. 5; quoz. 7117. Nuovo div. min. 5, quoz. 1423; 5.° div. min. 5, quoz. 284; e perchè questi è $= 13 \times 19$ si ha

$$\begin{array}{lll} 5, 5, 5, 19, 19 & . & . & \left\{ \begin{array}{l} \text{div. sempl.} \\ \text{div. doppi} \\ \text{div. tripli} \end{array} \right. \\ 5, 5, 5, 5, 13, 19 & . & . & \\ 5, 5, 5, 5, 5, 13, 19 & . & . & \\ 5, 5, 5, 5, 5, 13, 19 & . & . & \left\{ \begin{array}{l} \text{div. quadrupli} \end{array} \right. \end{array}$$

§. 23. La teoria delle combinazioni è per se stessa una scienza fondamentale, prima di lasciarsi

ci è d'uopo addurre un'adeguata dimostrazione della formale (c), (d) (14 e 16).

La richiesta funzione di m ed n , esprimente il n.° delle permutazioni fra m elementi presi n alla volta, diciasi $f_{m,n}$ e si vedrà (14), che $f_{m,n}$ equivale ad un num.° composto di m classi, ciascuna di un egual num.° di termini, e consistente nelle permutazioni fra $m-1$ elementi presi $n-1$ alla volta, alla testa de' quali chiesi l'elemento che manca fra gli $m-1$ contemplati, tale essendo (§. cit.) la più semplice maniera per formare con univo metodo le permutazioni degli ordini successivamente più alti. Il simbolo generale dell'indicata derivazione successiva è pertanto $f_{m,n} = {}^{m-1}f_{m-1,n-1}$ e perchè m, n rappresentino due interi qualunque, tale può che sia $n-m$, si può sostituire $m-1$ per m ed $n-1$ per n onde avere $f_{m-1,n-1} = {}^{(m-1)}f_{m-2,n-2}$. Ripetasi la stessa sostituzione in questa eq. e nelle conseguenti, finchè giungasi ad una trasformata il cui 1.° membro sia $f_{m-(n-1),1}$ che dettasi un qualunque n.° $m-(n-1)$ di elementi, presi uno alla volta, una univoca permutazione e detto per conseguenza $m-(n-1)$ risulterà, l'ultima trasformata è $f_{m-(n-1),1} = {}^{m-(n-1)}f_{m-n,n-1}$ e la successiva derivazione di tutte le trasformate costituisce il seguente sistema

$$\begin{aligned} f_{m,n} &= {}^{m-1}f_{m-1,n-1} \\ f_{m-1,n-1} &= {}^{(m-1)}f_{m-2,n-2} \\ f_{m-2,n-2} &= {}^{(m-2)}f_{m-3,n-3} \\ &\dots \dots \dots \end{aligned}$$

$$f_{m-(n-1),1} = (n-(n-1)) f_{m-(n-1),1}$$

$$f_{m-(n-1),1} = m-(n-1)$$

Il prodotto dei primi membri dorando esser' eguale a quello dei secondi, si ha

$$f_{m,n} f_{m-1,n-1} f_{m-2,n-2} \cdots f_{m-(n-1),1}$$

$$f_{m-(n-1),1} = n(n-1)(n-2) \cdots [n-(n-1)] > c$$

$$[n-(n-1)] f_{m-1,n-1} f_{m-2,n-2} \cdots f_{m-(n-1),1} f_{m-(n-1),1}$$

e fatta la divisione dell' uno e dell' altro membro pel prodotto

$$f_{m-1,n-1} f_{m-2,n-2} \cdots f_{m-(n-1),1} f_{m-(n-1),1}$$

$$\text{resta } f_{m,n} = n(n-1)(n-2) \cdots [n-(n-1)] \cdots (c)$$

come eq. formula, che se vogliamo $m=n$, diventa

$$f_{n,n} = n(n-1)(n-2) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdots (c)$$

§ 44. Sia $x_{m,n}$ il n.° delle combinazioni. È

certo che qualora gli elementi di ciascuna combinazione si mescolano in tutti i modi possibili debbono ottenersi le permutazioni. Ma ciascuna combinazione contiene per ipotesi n elementi, e questi, a tenore della (g) danno $n(n-1) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1$ permutazioni. Dunque tutte le $x_{m,n}$ combinazioni debbono dare $[n(n-1) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1] x_{m,n}$ risultamenti, num.° d' altronde $= y_{m,n}$ per conseguenza

$$x_{m,n} \left\{ \begin{matrix} f_{m,n} \\ a, b, \dots, n \end{matrix} \right\} = \frac{n(n-1) \cdots [n-(n-1)]}{a, b, \dots, n} \cdots (d)$$

come gc.

§. 15. Dell'equazioni

$$\left\{ \begin{aligned} x_{m+n, n} &= \frac{(m+1)m(m-1) \dots [m+1-(n-1)]}{1 \cdot 2 \dots n} \\ x_{m, n} &= \frac{m(m-1) \dots [m-(n-1)]}{1 \cdot 2 \dots n} \\ x_{m, n-1} &= \frac{m(m-1) \dots [m-(n-2)]}{1 \cdot 2 \dots (n-1)} \end{aligned} \right.$$

moltiplicando per $1 \cdot 2 \dots n$ si raccoglie

$$\begin{aligned} & (m+1)m(m-1) \dots [m+1-(n-1)] \\ & = m(m-1) \dots [m-(n-1)] + \{ \\ & \quad m(m-1) \dots [m-(n-2)] \} n \\ & \left\{ m(m-1) \dots [m-(n-2)] \right\} [m-(n-1)+n] \\ & \left\{ m(m+1)m(m-1) \dots [m+1-(n-1)] \right\} \end{aligned}$$

il che costituisce un semplice ed interessante

Teor. Che il n° delle combinazioni fra $m+1$ elementi presi a alla volta, eguale a quello che si ottiene combinandone m come sopra, così altrettanti, ma $n-1$ alla volta, .

Si ha per esempio

$$\begin{aligned} x_{4,2} & (=10 \text{ pel §. 16}) = x_{4,1} + x_{4,2} = \\ & \frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{1 \cdot 2} + \frac{4 \cdot 3}{1} = 4+6=10. \end{aligned}$$

CAPITOLO IV.

Delle Potenze.

§. 16. I successivi prodotti che si ottengono moltiplicando una quantità per se stessa, sono

prodotto per la quantità medesima e così in seq. diversi potenze del grado *super*.

Tali son a^2 (quadrato), a^3 (cubo), ..., a^m , dove *m* si suppone intero, positivo, e si sa (a n.° III.) che *a* è sottivo *m* volte in a^m .

Si ha pure $a^4 = a^3 \cdot a = (a^2)^2 = a^{2 \cdot 2}$; $a^6 = a^3 \cdot a^3 = a^{3+3} = a^3 \cdot a^3 = a^{3 \cdot 2}$ ed in generale

$(a^m)^n = a^m \cdot a^m \dots (n \text{ volte}) = a^{mn}$, perchè *a* del-
 aver fattivo *m* volte in $(a^m)^n$.

Un'operazione così semplice non presenta in astratto alcuna difficoltà, ma in pratica s'ingombrerà un mai molto incomodi e laboriosi, che assolutamente abbisognano di un metodo compendioso, e son: 1.° che *a* sia una quantità composta di più termini; 2.° che abbia un valor numerico assai piccolo ed *m* un valore assai grande, come quando vuole a^{64} ; 3.° che al notabile valor numerico di *a* ne corrisponda uno ben piccolo di *m*.

Cominciando dal 1.° caso ci proponiamo d'investigare una spedita e facil norma, onde immediatamente ottenere qualunque determinata potenza della forma $(x+a)^m$, senza passar per le successive moltiplicazioni, ed a tale oggetto si gioca considerare il prodotto di parecchi binomj, aventi lo stesso primo termine, e che indicano-
 mo per

$$x+a_1, x+a_2, x+a_3, \dots, x+a_n.$$

$$(x+a_1)(x+a_2) = x^2 + a_1x + a_2x + a_1a_2$$

$$\begin{array}{c}
 (x+a_1)(x+a_2)(x+a_3) \\
 =x^3+a_1x^2+a_2x^2+a_3x^2 \mid x+a_1a_2a_3 \\
 \quad +a_1 \mid \quad +a_2a_3 \\
 \quad +a_2 \mid \quad +a_3a_1 \\
 \quad +a_3 \mid \quad +a_1a_2 \\
 (x+a_1)(x+a_2)(x+a_3)(x+a_4) \\
 =x^4+a_1x^3+a_2x^3+a_3x^3+a_4x^3 \mid x+a_1a_2a_3a_4 \\
 \quad +a_1 \mid \quad +a_2a_3 \quad +a_3a_4a_1 \\
 \quad +a_2 \mid \quad +a_1a_4 \quad +a_3a_2a_4 \\
 \quad +a_3 \mid \quad +a_2a_1 \quad +a_4a_3a_2 \\
 \quad \quad +a_4a_1 \\
 \quad \quad +a_1a_4
 \end{array}$$

Proseguendo nella stessa guisa cioè a moltiplicare un determinato n° p di binomi, si trova:

1.^o Che il primo termine del prodotto è x^p , tal dovendo essere il prodotto di tutti gli x contenuti nei dati n° p di binomi.

2.^o Che nei successivi termini l'esponente d' x va successivamente diminuendo di una unità sino ad x^1 .

3.^o Che la potenza x^{p-1} ha per coefficiente la somma di tutti i secondi termini $a_1, a_2, \dots, a_p$.

4.^o Che il coefficiente d' x^{p-2} è composto delle combinazioni binarie fra i reddetti secondi termini.

5.^o Che il coefficiente d' x^{p-3} vien formato dalle combinazioni ternarie e così via, sino ad x^{p-p} (=1) che proviene affatto dalla combinazione di tutti i secondi termini, vale a dire che esso è $=a_1a_2a_3\dots a_p$.

6.^o Che il n° de' termini è $=p+1$.

L'aposto circolante essendo indipendente dal

Se

valore di $a_1, a_2, \dots$, possiamo supporre tutti i termini $a_1, a_2, \dots, a_p$, eguali ad a_1 , e chiamare il prodotto di p fattori in tale ipot. diviso $(x+a_1)^p$, una facile osservazione de' coefficienti receduti ne' coefficienti d' x^{p-1}, x^{p-2} ec., dei fatti scopre la legge a cui soggiace la formazione de' successivi termini, cioè quella simbolica sopra che si deduceva.

L'ipotesi sopra indicata riduce il coefficiente d' x^{p-1} ad un n.° p di termini eguali ad a_1 , cioè $-pa_1$; ciascuno de' termini che moltiplicano x^{p-2} si esprime in a_1^2 , e perchè le combinazioni binarie di p elementi sono $\frac{p(p-1)}{2}$,

il coefficiente d' x^{p-2} prende la forma di $\frac{p(p-1)}{2}a_1^2$: così, perchè i termini che compo-

gono il coefficiente d' x^{p-3} risultano tutti eguali ad a_1^3 , e sono tanti quante le ternarie combinazioni di p elementi, ossia $\frac{p(p-1)(p-2)}{3 \cdot 2}$, si ha

Il coefficiente d' $x^{p-3} = \frac{p(p-1)(p-2)}{3 \cdot 2}a_1^3$; e lo stesso ragionamento si estende sino all'ultimo ter-

mine, cioè al $(p-1)^{\text{esimo}}$, che è

$\frac{p(p-1)(p-2) \dots (p-(p-1))}{1 \cdot 2 \dots (p-1)p}a_1^p x^{p-p}$ ossia a_1^p .

Si ha pertanto la seguente formula, che può rappresentarsi verificata nelle potenze $a^p, \frac{1}{2}a^p, \frac{1}{3}a^p$ ec.

$$\left. \begin{aligned}
 & \text{dalla } p^{\text{esima}} \text{ del binomio } x+a_1: \\
 & (x+a_1)^p = x^p + pa_1x^{p-1} + \frac{p(p-1)}{2}a_1^2x^{p-2} + \dots \\
 & \quad + \frac{p(p-1)(p-2)}{3 \cdot 2 \cdot 1}a_1^3x^{p-3} + \dots \\
 & \quad + \frac{p(p-1) \dots [p-(n-1)]}{n \cdot (n-1) \dots (p-n+1)}a_1^n x^{p-n} + \dots + a_1^p
 \end{aligned} \right\} \dots (A)$$

e perchè il coefficiente di $a_1^{p-1}x$ è affetto da un n° , esprimevole quello delle combinazioni di p elementi presi $p-1$, così (§ 15) una alla volta il coefficiente di $a_1^{p-2}x^2$ è affetto da un n° esprimevole quello delle combinazioni di p elementi presi $p-2$, così (§ cit.) due alla volta, e così ec. I coefficienti numerici equidistanti dagli estremi sono identici, e lo sviluppo di $(x+a_1)^p$ finisce coi termini

$$\frac{p(p-1)(p-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}a_1^3x^3 + \frac{p(p-1)}{2}a_1^2x^2 + pa_1x + a_1^p$$

$$\text{Il termine } \frac{p(p-1) \dots [p-(n-1)]}{n \cdot (n-1) \dots (p-n+1)}a_1^n x^{p-n}$$

compreso in (A) è $\Gamma(n+1)^{\text{simbolo}}$ e dicasi termine generale, perchè facendo $n=1, 2, 3 \dots p$, coincide coi rispettivi termini $a_1^1, a_1^2, \dots, a_1^p$.

§. 17. Verificare la formula (A) per tutte le potenze successive $1^{\circ}, 2^{\circ}$ ec. fino a quella di

un determinante ordine p^{n+1} deducasi

$(x+a_1)^p(x+a_2)^p \dots (x+a_n)^p = (h)(x+a_1)$,
e distinguendo i termini da due prodotti in due
linee simmetriche, in guisa che ciascuno della $1.^\alpha$
linea verticalmente corrisponda al suo simile della
2.ª, si avrà

$$\left. \begin{aligned} & (x+a_1)^{p+1} \dots x^{p+1} + p a_1 \left| \begin{array}{c} x^p + \dots + p(p-1)a_1^2 \end{array} \right| x^{p-1} \\ & \quad + a_1 \left| \begin{array}{c} \dots \dots \dots p a_1^p \end{array} \right| \\ & + \frac{1}{x} \left| \begin{array}{c} p(p-1)(p-2)a_1^3 \end{array} \right| x^{p-2} \dots \\ & + \dots \dots \dots \left| \begin{array}{c} p(p-1)a_1^2 \end{array} \right| \\ & - \frac{p(p-1) \dots [p-(n-1)]}{x \cdot 2 \dots (n-1)x} a_1 \left| \begin{array}{c} x^{p-(n-1)} \end{array} \right| \\ & - \frac{p(p-1) \dots [p-(n-1)]}{x \cdot 2 \dots (n-1)} a_1 \left| \begin{array}{c} \dots \dots \dots \end{array} \right| \\ & \dots \dots \dots + a_1^p \left| \begin{array}{c} x + a_1 \end{array} \right| x^{p+1} \\ & \quad + p a_1^p \left| \begin{array}{c} \dots \dots \dots \end{array} \right| \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (1)$$

e riducendo, con senza il residuo del teor. di-
mostrato (§5)

$$\left. \begin{aligned} & (x+a_1)^{p+1} \dots x^{p+1} + (p+1)a_1 x^p + \frac{1}{2}(p+1)p a_1^2 x^{p-1} \\ & \quad + \frac{1}{6}(p+1)p(p-1)a_1^3 x^{p-2} \dots \\ & - \frac{(p+1)p(p-1) \dots [p+1-(n-1)]}{x \cdot 2 \dots (n-1)} a_1 x^{p-(n-1)} \dots \\ & \dots \dots (p+1)a_1^p x + a_1^{p+1} \dots \dots \dots (2) \end{aligned} \right\}$$

Avvertasi che i coefficienti numerici di (2) non
siffono alterazioni mentre essi si moltiplica per
 $x+a_1$; che i coefficienti analoghi della 1.ª linea
in (1) coincidono con quelli di (2), e che i coef-

valenti della n° linea con quelli della $(n+1)^{\circ}$ anzitutto promossi di un ordine, e si vedrà che la derivazione della formula (1), va necessariamente passando da qualsivoglia irregolarità o asimmetria: ma la formula (1) coincide con (2) ove si sostituisca $p+1$ per p : dunque la legge di derivazione fra i consecutivi termini dell'addetta formula si estende anche allo sviluppo della potenza $(x+a_1)^{p+1}$: quindi, per la stessa ragione, a quella di $(x+a_1)^{p+2}$, e così all'infinito: vale a dire che il tipo della formula (1) in cui p si è supposto un n.° determinato, è generale per qualunque potenza intera positiva, e si ha

$$\left. \begin{aligned} (x+a_1)^n &= x^n + nax^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2!}a^2x^{n-2} \\ &\quad + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}a^3x^{n-3} + \dots \\ &\quad + \frac{n(n-1)\dots[n-(n-1)]}{n!}a^na^{n-n} \\ &\quad + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}a^3x^3 \\ &\quad + \frac{n(n-1)}{2!}a^2x^2 + nax^{n-1}x + a^n \end{aligned} \right\} (n)$$

Nè manca una regola pratica per ordine questa formula con la massima speditezza. Essa è composta di due parti:

1. Gli esponenti di x e quelli di a nei consecutivi termini sono rispettivamente

$$\begin{array}{ccccccc} n, & n-1, & n-2, & \dots, & 2, & 1, & 0 \\ 0, & 1, & 2, & \dots, & n-2, & n-1, & n. \end{array}$$

Il coefficiente di qualunque termine è il prodotto di quello dell'antecedente per l'esponente d' x in esso, diviso pel numero di tutti i termini antecedenti.

Si domanda la potenza 6^{a} d' $x+a$.

§. 18. Le quattro formule particolari che seguono, meritano attenta considerazione:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2,$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3;$$

$$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab+ac+bc);$$

$$(a+b+c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3a^2(b+c) + 3b^2(a+c) + 3c^2(a+b) + 6abc.$$

Le ultime due considerando si deducono dalle precedenti rispettive, sostituendosi $b+c$ per b . Se venga proposto di sviluppare $(a^2 + \frac{x^2}{y})^m$

facciasi $a^2 = a$, $\frac{x^2}{y} = b$, ed effettuata l'operazione si sostituisca il valore di a e di b .

La dimostrazione che abbiamo data della formula del binomio (§. 1) non vale nel rigore al decimo, e tutto per questa ci scusiamo, lo sapremo nella completezza e nella chiarezza.

§. 19. Ecco un facile artificio per li casi di cui (§. 16. n.° 4.°) Attesa l'equivalenza de' simboli $a^{1/2m}$, $(a^{1/2m})$, ciascuno de' quali indica il prodotto in cui a è fattore un volte, se si suppone $m=2p$, p unq. no. si ha

$$a^{1/2m} = a^{1/p} = (a^{1/2})^{1/p} = a^{1/2} \cdot a^{1/2} \cdot a^{1/2} \cdot \dots \cdot a^{1/2} \text{ no. } p.$$

Essendo $m=2p+1$, p unq. no., no. si può dedurre $a^{1/2m} = a^{1/2p+1} = (a^{1/2})^{2p+1} = (a^{1/2})^{2p} \cdot a^{1/2} = (a^{1/2})^{1/p} \cdot a^{1/2}$.

$$\begin{aligned} \text{Es.}^{\circ} 1.^{\circ} \quad x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1 &= (x^2 - 2x + 1)^2 = (x-1)^4 \\ &= 65536^4 - 65536^3 + 409600000x^2 \\ &= 65536^4 - 65536^3 + 409600000x^2 + 268435456x - 65536 \end{aligned}$$

Preso dalla tavola della potenza il quadrato di 4096, tutta l'operazione esige 80 moltiplicazioni e poi 26 addizioni, per la maggior parte molto lievi, mentre il metodo ordinario richiederebbe 535 moltiplicazioni.

$$\begin{aligned} \text{Es.}^{\circ} 2.^{\circ} \quad 5^{10} - 5.5^{10} &= 5.5^9 = 5.5^8 + 4.5^8 \\ &= 4.5^8 + 5.5^8 = 9.5^8 = 9.5^7 + 8.5^7 \\ &= 9.5^7 + 8.5^7 = 17.5^7 = 17.5^6 + 16.5^6 \\ &= 17.5^6 + 16.5^6 = 33.5^6 = 33.5^5 + 32.5^5 \end{aligned}$$

Per ciò che riguarda la base potenza degli altri numeri interi, e la potenza negativa delle cifre, veggasi Op. cit. T. I. §§. 75, 76.

§. 36. La formula $(x+b)^n = x^n + nx^{n-1}b + \dots$ (§. 28) suggerisce un facile metodo per risolvere ogni eq. di 2.^a grado, la cui formula è $x^2 + px + q$, dove p, q si suppongono, ed in pratica debbono essere, numeri interi.

Siccome $p \pm 2px + q$, il binomio $x^2 + px$ contiene i due primi termini di $(x + \frac{1}{2}p)^2$, ed aggiungendogli $(\frac{1}{2}p)^2 (= \frac{1}{4}p^2)$, termine che, per non turbare l'equivalenza, si aggiunge anche a q , ottenesi $(x + \frac{1}{2}p)^2 = \frac{1}{4}p^2 + q$ ($= \frac{p^2 + 4q}{4}$)

ed estratta la radice quadrata si ha

$$x + \frac{1}{2}p = \pm \sqrt{\frac{p^2 + 4q}{4}}, \text{ d'onde}$$

$$x = \left[-\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2 + 4q}{4}} \right] \quad (*)$$

valori che verificano la proprietà e perciò ne costituiscono due risolvendi.

(*) Essi differiscono sopra alla radice perché $-(a \pm b) = (-a \pm b)$ ecc.

Si sa che la loro somma è $-\alpha\beta\gamma$, il prodotto $\alpha\beta\gamma$, e che l'espressione d' x è generalmente della forma $\alpha\alpha'\sqrt{b}$.

Es. 1.^a Si domanda un n.^o il cui quadrato aggiunto al suo triplo ed alla sua metà faccia 186. Soluz.^{ne} Se considero il n.^o di cui si tratta lo verificherò sperimentando se di esso la condizione assegnata. Sia dunque x il suddetto n.^o, e perchè sia soddisfatto dovrà essere

$$x^2 + 3x + \frac{1}{2}x = 186, \text{ ossia } x^2 + 3x + \frac{1}{2}x = 186.$$

Aggiunto ad ambedue i membri $(\frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4}$ ottengo

$$x^2 + 3x + \frac{1}{2}x + \frac{1}{4} = 186 + \frac{1}{4} = \frac{745}{4}.$$

Quindi $x = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4(\frac{1}{2} \cdot \frac{745}{4})}}{2}$ ed $x = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 745}}{2}$.

Infatti $(12)^2 + 3 \cdot 12 + \frac{1}{2} \cdot 12 = 144 + 36 + 6 = 186$.

Es. 2.^a Un possidente di 40 ajajo di grano ad un agricoltore e gli dice: tu lo seminerai a tua spesa nel mio podere, ed in compenso avrai tanto ajajo di grano col tuo fratto, quanto di uno ajajo di sementi ne nasceranno. Sappendo che il podere rende ajajo 75. Quale fu il fratto della semente, quale la porzione che di esso toccò all'agricoltore?

Soluz.^{ne} Sappiamo x il frutto di una ajajo, e veggio che risulta $\alpha\beta\gamma$ quella della semente, cioè la porzione dovuta al villano, $-\frac{1}{2}x = -x^2$ la porzione del proprietario: ciò significa che il numero x , per esser soddisfatto deve verificare l'equazione

$$40x - x^2 = 75 \text{ ossia } x^2 - 40x + 75 = 0$$

Fatta $p = -40$, $q = -75$ ritraggo

$$x = \frac{40 \pm \sqrt{40^2 - 4 \cdot 75}}{2}$$

$$= \frac{40 \pm \sqrt{1600 - 300}}{2} = \frac{40 \pm \sqrt{1300}}{2} = 58, 58.$$

Infatti 40 . 58, fruttato del podere, - 58 . 58

ossia 1500 - 1444 = 75; come pare

$$2 \cdot 40 - 2 \cdot 58 = 80 - 116 = 475.$$

Talvolta il probl. è in apparenza del n° grado, in realtà del 1° .

Un generale dispone in truppe in battaglia quadrato e gli avanzano 17 soldati: aggiunge un soldato ad ogni fila e gliene mancano 174. Quanti sono i soldati? Soluz.^{ne} Datto x il n° di quelli che compongono una fila nella 1° distribuzione si ha

$$x^2 + 17 = (x+1)^2 - 174, \text{ cioè } 17 = 2x - 173;$$

quindi

$$x = 95 \text{ ed } x^2 + 17 \text{ (n.}^{\circ} \text{ cercat.)} = 95^2 + 17 = 9132.$$

CAPITOLO V.

Estrazione delle radici, quadrate e cubiche, delle quantità letterali.

§ 51. Avendo riconosciuto che l'incertezza e la difficoltà, nel l'estrazione di una radice da un data polinomio va sottoposta, lasciamo disporre qualche opportuna sezione sull'indole delle potenze letterali, ci proponiamo d'esporre quanto in quella del 1° e del 3° grado si è riuscito di rintracciare.

Espresso un binomio qualunque per $am+an$, dove a, n , son n° , ed m, m_1 , monomi qualunque, non può supporre che in $a^2m^2+2amnm_1+n^2m_1^2$, sviluppati da $(am+an)^2$, si verifichi alcuna delle ipotesi

$$m^2=nm_1^2, \quad m^2=mm_1, \quad am_1=nm_1^2,$$

il secondo scomposto per ridurlo ad un minor num.^o di termini, senza che ne derivi mn , e il che distrugge la forma binomia della radice: si ha inoltre

$$mn, m\sqrt{a^2 \cdot a^2}: \text{ dunque}$$

Casus I. Il quadrato di un binomio è composto di tre termini, due de' quali, se non tutti, sono quadrati, ed almeno un coefficiente è la doppia radice del prodotto degli altri.

Per es.^o il trinomio $4x^4 + 16x^2y^2 + 16y^4$ ha le proprietà richieste, ogni termine è un quadrato, e due coefficienti (4.^o e 16.^o) equivalgono alla doppia radice quadrata del prodotto degli altri.

Esclusa nella espressione del quadrato di un trinomio qualunque, cioè di $mn + 2m_1m_2 + m_1^2 + m_2^2$, la somiglianza di due quadrati e quella di due prodotti, perchè contraria alla forma binomia della radice, può farsi una delle ipotesi

$$m^2 = mn, m_1^2 = m_1m_2, m_2^2 = mn, m_1^2 = mn,$$

non due, altrimenti si ricade nell'averbo di cui sopra. Si ha per es.^o $mn = m_1^2 = m_2^2$ dalla 1.^a e la 2.^a si tiene $m_1 = m_2$. Avvertasi che l'identità letterale può combinarsi con la distruzione de' coefficienti, come succede in $(1 + 2x - 2x^2)^2$, che contiene i termini $4x^2$, $-4x^3$, e si confonderà.

Can. II. Che il num.^o de' termini componenti il quadrato di un binomio non è <4 né >6.

Il n.^o delle integrità è nullo quando i letterali componenti de' termini che costituiscono la ra-

$$\} ap_1p_2+p_2p_3, p_2p_3+p_3p_1, ap_3+p_3p_1 \}.$$

Allorchè rimangono quattro soli termini bisogna anche che costassero le identità numeriche

$$b^2=ac+ap, ab+bp=ap, a^2=ab+ap.$$

Ma eliminando a fra la 1.^a e la 3.^a si ottiene

$$\frac{b}{a} = \frac{a^2}{a^2} \text{ cioè } ab^2=aa, \text{ e questa contraddice alla}$$

1.^a. Dunque due soltanto delle addotte ap^2 si possono supporre costanti, e ciò produce l'evanescenza di quattro termini, che combinata con la riduzione di due altri ad uno, dimostra essere il minimo aggregato finale un quadrinomio: nè tal conseguenza va soggetta ad alcuna eccezione, perchè una terza di termini simili contraddire alla forma quadrinomica della funzione proposta. Dunque

Cas. III. *Il n.º de' termini componenti il quadrato di un quadrinomio non è <5, ed >10.*

Cas. IV. *Il trinomio ed il quadrinomio debbono consistere due quadrati ed un solo segno negativo, che non s'rifaccia ad un quadrato.*

Ossero il trinomio per cui la proposizione è manifestata, basta osservare (pag. prec.) che l'espansione di $(x+bx^2+cx^3+dx^4)^2$ necessariamente contiene x^4 e d^2x^{10} , e che si ha

$$(1+ax+ax^2+ax^3)^2 = 1+4a+6a^2+8a^3+4a^4+ax^4;$$

$$(1+ax+ax^2+ax^3)^2 = 1+4a+6a^2+8a^3+4a^4+ax^4;$$

$$(1+ax+ax^2+ax^3)^2 = 1+4a+6a^2+8a^3+4a^4+ax^4.$$

Gen. V. Il n.° di termini, perchè $n > 1$, non si oppone all'ultima estrazione della radice quadrata di un polinomio, e quindi può essere di di tre che di quattro termini se tratti di un trinomio; di quattro o cinque termini se riferiti essi ad un sviluppo.

Ciò si verifica osservando che il quadrato di un quindicesimo può contenere otto termini come avviene in $(1+a-a^2-a^3-a^4)^2$, ed un maggior n.° sia a 15 come in $(a+b+ac-ad+e)^2$.

Che il quadrato di un ventiquattresimo può esser composto di dieci termini, come $(1+a-a^2-a^3-a^4-a^5)^2$, e dà un maggior n.° sia a 21, e così ec. ec.; osservazione che costituisce un argomento induttivo, ma superiore senza eccezione a tutte le idee della possibile occorrenza.

Esempl. 1.° Sia proposto il trinomio

$$9a^2+12a^2b+4b^2.$$

Avendo riconosciuto ch'esso non contredice al canone, deduce $\sqrt{9a^2+12a^2b}$: suppone la radice richiesta $3a^2+x$, e perchè il trinomio dato due volte sia $a.3a^2 > x.a$, lo $6a^2x = 12a^2b$ è un risultato $x = \frac{12a^2b}{6a^2} = 2b$. Se il trinomio è un quadrato bisogna che il 3.° termine $4b^2$ coincida con $(-2b)^2$, e insieme ciò succede dico che la radice è $3a^2-2b$.

Es. 2.° Avendosi il ventinomio

$$9a^2+12ax+4x^2+68y-4xy+y^2$$

4.^a

$$9x^2 + 6xy + 4y^2 - 12x - 4y + 7$$

ed estratta la radice 3a del 1.^o termine, dividendo poi doppio 6a il 2.^o, e se la radice resta due volte 3a $3a - y - 2x$. Siccome il quadrato di 3a non manca nella data espressione resta da vedersi se a $3a(y - 2x) + (y - 2x)^2$ coincide con gli ultimi cinque termini, e ciò verificandosi si conclude ciò.

Potrasi anche diendere -12ax per a3a, indi togliere dal residuo il quadrato di 3a-2x, onde avere il residuo $(6a-4x)y-y^2$, dal cui 1.^o termine, diviso per a(3a-2x) si ricava y, 2.^o termine della radice, perchè $[a(3a-2x)+y]y$ equivale al residuo.

Esamp.^a 3.^a Vuol si la radice quadrata di

$$16a^4 - 16a^3b + 8a^2b^2 - 12ab^3 + 9b^4.$$

Estratta la radice 4a² da 16a⁴ divide -16a³b per a4a² ed ottengo -2ab per a.^a termine: 3a il quadrato

$$(4a^2 - 2ab)^2 = 16a^4 - 16a^3b + 4a^2b^2,$$

e noto il residuo $-12a^2b^2 + 9b^4$

$$\text{ovvia } 3b^2(4a^2 - 2ab) + 9b^4;$$

e dunque questa due contiene il doppio prodotto di 4a²-2ab pel 3.^a termine che dico x, tanto la divisione del suddetto residuo per a(4a²-2ab) a nuovo +3b²; sperimento se a(4a²-2ab) x 3b² + (3b²)² coincide col residuo stesso, e vedendo che ciò succede conclude che la radice è 4a²-2ab+3b².

Il 3.^a termine potrasi anche ottenere estraendo la radice dal quadrato 9b⁴ e verificando la coincidenza di $(4a^2 + 3b^2 - 2ab)^2$ con la funzione proposta, ma il metodo usato, ha il pregio di non aggiungere al equivoco, e di comporre la regola che si suol fare nella ricerca della radice quadrata de' numeri. a

$$\text{Es. 3.}^\circ \text{ Sia } \frac{c^2}{16} - \frac{abc^2}{8} + a^2b^2 + \frac{b^2c^2}{24} - ab^2 + \frac{b^3}{8}$$

$$\text{Scrivo } \frac{c^2}{16} + \frac{1}{2} \left(\frac{b^2}{8} - ab^2 \right) c^2 + a^2b^2 - ab^2 + \frac{b^3}{8}$$

ed estratta la radice del 1.° termine divide il 2.°
 con $\frac{1}{2} \left(\frac{b^2}{8} - ab^2 \right) c^2$ per il doppio di essa, cioè per

$$\frac{c^2}{8} \left(-1, \frac{c^2}{8} \right) : \text{ind.}, \text{ per ridurre a prova il quo-}$$

$$\text{ziente } \frac{b^2}{8} - ab^2 \text{ moltiplico in } \left(\frac{c^2}{8} + \frac{b^2}{8} - ab^2 \right) \left(\frac{b^2}{8} - ab^2 \right)$$

coincide con gli ultimi quattro termini, e ciò
 verificandosi dico che $\frac{c^2}{8} + \frac{b^2}{8} - ab^2$ è la radice.

Es. 4.° È dato il trinomio

$$a^2 - ac^2b + 3a^2b^2 - a^2b^3 + 2ab^3 + b^4.$$

Nell'incertezza se la radice sia trinomia o qua-
 dratica estraggo la radice a^2 di a^2 , divido
 $-ac^2b$ per $2a^2$, e scrivo $a^2 - ac^2b$ oppure $a^2b - a^3$,
 tolto il quadrato di $a^2b - a^3$ trova il residuo

$$2a^2b^2 - a^2b^3 + 2ab^3 + b^4 : \dots (p)$$

che divido per $-2a^2 + 2a^2b$: il quoziente è $-ab^2$,
 e qualora la radice sia trinomia ed esatta, la fun-
 zione $\{a(a^2b - a^3) - ab^2\}c - ab^2$ deve coincidere con
 (p) . La sostituzione, facendomi la voce della zero,
 $2a^2b^2 - a^2b^3 + 2ab^3 + b^4 : \dots (p)$ con ragione so-
 spetto che ai termini trovati ne mancherà uno; di-
 vido il 1.° termine di (p) per $-2a^2$, e per as-
 sicurarmi che il quoziente $-b^2$ compie la radice,
 verifico l'identità fra (p) e la scelta funzione
 $\{a(a^2b - ab^2 - a^3) - b^2\}c - b^2$: ed ottenuto questa
 riprova ne inferisco che la radice richiesta è

$$a^2b - ab^2 - a^3 - b^2.$$

§ 3a. Anche il binomio $a \pm \sqrt{b}$, dove a, b , si suppongono date quantità letterali, essendo ancora la radice sotto la forma $g \pm \sqrt{h}$, e la ricerca di essa è necessaria per la definitiva soluzione di tutti i problemi che dipendono da un'equazione compresa nella formula $y^2 + py^2 + q$, perchè fatto $y^2 = a$ e arrivando a per $-\frac{1}{2}p$, e per $q + \frac{1}{4}p^2$, si ottiene (3a)

$$a \text{ o sia } y^2 = a \text{ o } a \pm \sqrt{b} \text{ ed } y = \sqrt{a} \text{ o } \sqrt{a \pm \sqrt{b}}.$$

Quando l'indicata estrazione riesce impossibile si riserba l'uso della prez. formula ai casi pratici ove a, b son numeri, così in tali giuoca molto avere la radice sotto la forma $g \pm \sqrt{h}$, perchè la successiva estrazione da b ad $a \pm \sqrt{b}$, oltre di esser molesta, è anche doppiamente difettiva.

Si è supposto nella radice il termine $\sqrt{h}$ perchè se un termine di tal natura non esistesse nella radice, oppure potrebbe trovarsi nel quadrato.

Così posta sia $\sqrt{a \pm \sqrt{b}} = g \pm \sqrt{h}$,
 innalzando al quadrato si viene

$$a \pm \sqrt{b} = g^2 \pm 2g\sqrt{h} + h,$$

o sia $a - g^2 - h = \pm 2g\sqrt{h} - \sqrt{b}$.

Questa equazione, siccome non esiste equazione fra due quantità, una razionale l'altra no, può separatamente esser soddisfatta mediante le ipotesi

$$a - g^2 - h = 0, \quad 2g\sqrt{h} - \sqrt{b} = 0.$$

Dalla 1.^a $g = \frac{a-h}{2\sqrt{h}}$ e $g^2 = \frac{b}{4h}$, espressione che trasforma la 2.^a in $4h^2 - 4ah + b = 0$:

quindi $4h^2 - 4ah + b = 0$ e per § 3a, $h = \frac{1}{4}(a \pm \sqrt{a^2 - b})$.

Donque $g = \sqrt{a-h} = \sqrt{\frac{1}{2}(a \pm \sqrt{a^2 - b})}$ e per b
 $\sqrt{a \pm \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{1}{2}(a \pm \sqrt{a^2 - b})} \pm \sqrt{\frac{1}{2}(a \pm \sqrt{a^2 - b})} \cdot \sqrt{h}$

Se ha per esempio

$$(1+a-a^2)^3=1+3a-3a^2+3a^3-a^6: \text{ dunque}$$

Con. II. Un' espressione interale che ammetta la radice cubica irrazionale, non può avere meno di 5 termini né più di 10, come $(a+ab+ac)^3$.

Con. III. Un quadrinomio che ammetta la radice cubica, non può avere un dispari n.° di segni negativi: un polinomio che sia un cubo ha un solo segno negativo, come $(1+a-a^2)^3$, o ne ha tre come $(1-a-a^2)^3$.

La 1.ª parte si verifica osservando lo sviluppo di $(a-b)^3$.

$$\text{Es.}^{\circ} 1.^{\circ} \text{ Volendo } \sqrt[3]{(a^3+6a^2b+12ab^2+8b^3)}$$

dettero $\sqrt[3]{a^3}=a$, diviso $6a^2b$ per $3a^2$, e perché $(a+ab)^3$ coincide con la proposta espressione indicata ss.

Anziensi dal Con. I. che il dato quadrinomio dei coefficienti d'un cubo, potremmo estrarre da due sfedano di cui la radice, per mettere a prova la verità dell'ora e dell'altra, ma una tal ipotesi va soggetta ad equivoco, a motivo che il cubo del quadrinomio possa avere anche tre, come succede in $a^3+3qa^2b^2+3q^2ab^3+q^3q^2b^3$, la cui radice cubica è $q+q^2b^3$, mentre la radice del due primi termini danno $a+3ab$.

Es.° 2.° È dato il decinomio

$$a^3+(3a^2+ab)a^2+(3a^2+ab)a^2+3ab^2+3ab^2+3ab^2+3ab^2+3ab^2+3ab^2+3ab^2.$$

Per togliere qualche $3a^2$ dal 1.° termine a del

la radice, ricavata da $\sqrt[n]{a^2}$, divisa per $(5a-3b)a^2$; il quoziente $3c-ab$ moltiplicato ed a s'aggiunga $(a+3c-ab)^2$ forma il denominatore dato: siccome ciò succede è $a+3c-ab$ la radice richiesta.

CAPITOLO VI.

Teoria e calcolo delle quantità irrazionali.

§. 34. La formazione delle potenze e l'estrazione delle radici son'operazioni inverse, e se l'una dell'una e dell'altra sia lo stesso, si chiede esattamente, come

$\frac{5 \times 6}{5} = 6$. Si ha per es.^o $\sqrt[5]{(a^6)^3} = \sqrt[5]{a^{18}} = a^3 = a^{\frac{18}{5}}$;

Considerando i risultamenti che seguono

$$\begin{cases} a^{\frac{1}{2}} = a \cdot \sqrt[2]{a^2}; & a^{\frac{3}{2}} = a^2 \cdot \sqrt[2]{a^2}; & a^{\frac{5}{2}} = a^3 \cdot \sqrt[2]{a^2}; & \text{ec.} \\ a^{\frac{3}{4}} = a \cdot \sqrt[4]{a^3}; & a^{\frac{5}{4}} = a^2 \cdot \sqrt[4]{a^3}; & a^{\frac{7}{4}} = a^3 \cdot \sqrt[4]{a^3}; & \text{ec.} \\ a^{\frac{1}{3}} = a \cdot \sqrt[3]{a^2}; & a^{\frac{2}{3}} = a^2 \cdot \sqrt[3]{a^2}; & a^{\frac{4}{3}} = a^3 \cdot \sqrt[3]{a^2}; & \text{ec.} \end{cases}$$

si vede dover essere la generale $a^{\frac{m}{n}} (-a^n) = \sqrt[n]{a^{m \cdot n}}$.

Ed infatti le operazioni inverse (moltiplicazione e divisione dell'esponente per un dato n , intero) debbono dare un nuovo risultamento, e tale appunto è la radice m^{tesima} per rapporto alla potenza dello stesso a ; ed si è ragionato per cui quando m, n , sono primi fra loro, debba essere

ora $a^{\frac{m}{n}} (-a^n)^n$, potenza m^{tesima} di a^n , ed $a^{\frac{m}{n}}$ non ne sia l' m^{tesima} radice.

La precedente verità, riconosciuta per la prima

valori del Geometra B'alla, verità che potrà vedersi facilmente confermata mediante il metodo logaritmico per l'estrazione delle radici, o per la strada alla dimostrazione da un fondamentale principio del calcolo algebrico.

Adotta l'identità $AB=BA$, proveniente da $(\sqrt[n]{A}\sqrt[n]{B})^n=(\sqrt[n]{AB})^n$, posto a' per A , a'' per B , risulta

$$a'^{\frac{1}{n}} \cdot a''^{\frac{1}{n}} \left[= \sqrt[n]{a' a''} = \sqrt[n]{a' a''} = \sqrt[n]{a'^{r+1}} \right] = a'^{\frac{r+1}{n}},$$

$$\text{e quindi (12), } a'^{\frac{1}{r}} \cdot a''^{\frac{1}{r}} \left[= a'^{\frac{1}{r}} \cdot a''^{\frac{1}{r}} = a'^{\frac{r+1}{r}} \right] = a'^{\frac{r}{r} + \frac{1}{r}}.$$

Facciam $r=+1$, $r=-1$, e si avrà

$$a'^{\frac{1}{n}} \cdot a''^{\frac{1}{n}} = a'^{\frac{1}{n} + \frac{1}{n}}, \text{ cioè } a'^{\frac{1}{r}} \cdot a''^{\frac{1}{r}} \cdot a''^{\frac{1}{r}} = a'^{\frac{r}{r} + \frac{1}{r} + \frac{1}{r}},$$

$$\text{in generale } a'^{\frac{1}{n}} \cdot a''^{\frac{1}{n}} \cdot a''^{\frac{1}{n}} \dots a''^{\frac{1}{n}} = a'^{\frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \frac{1}{n} \dots + \frac{1}{n}}.$$

Si può stabilire pertanto, che la regola espressa per $a'' a'' = a''^{m+n}$ (a n.° 111) è generale qualunque sieno m , n , interi e frazi, e qualunque sia il n.° de' termini a'' , a'' , a'' ecc. che si vogliono lusinga moltiplicare. (*)

§. 55. L'operazione espressa da qualunque segno radicale, come $\sqrt[n]{}$, si può spartire in varie operazioni consecutive quando moltiply sia. Così $\sqrt[n]{P} = P^{\frac{1}{n}} = (P^{\frac{1}{n}})^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{\sqrt[n]{P}}$;
 $\sqrt[n]{P} = P^{\frac{1}{n}} = (P^{\frac{1}{n}})^{\frac{1}{n}} = (P^{\frac{1}{n}})^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{\sqrt[n]{P}} = \sqrt[n]{\sqrt[n]{P}}$;

(*) La convenzione che abbiamo fatta in questi pag. ha per oggetto secondario di rendere simili le due piante impresse nel due fol. in pag. 165.

$$\begin{aligned} & \sqrt[n]{P=pb^{\frac{1}{n}}})^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{\sqrt[n]{P}} = \sqrt[n]{P}, \quad \sqrt[n]{P=pb^{\frac{1}{n}}})^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{\sqrt[n]{P}} = \sqrt[n]{P}, \\ & \sqrt[n]{P=pb^{\frac{1}{n}}})^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{P} = \sqrt[n]{P}, \quad \sqrt[n]{P=pb^{\frac{1}{n}}})^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{P}, \\ & \sqrt[n]{P=pb^{\frac{1}{n}}})^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{P} = \sqrt[n]{P}, \quad \sqrt[n]{P=pb^{\frac{1}{n}}})^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{P}. \end{aligned}$$

§. 16. Supponendo $\sqrt[n]{P} = a + \frac{b}{c}$, dove $\frac{b}{c}$ sia frazione finita, si ha mediante la potenza m^{ma} di ambedue i membri

$$P = a^m + ma^{\frac{m-1}{c}} \frac{b}{c} + \dots + m a^{\frac{b(m-1)}{c}} \frac{b}{c} + \frac{b^m}{c^m},$$

moltiplicando per c^m e trasportando nel 1.° membro tutti i termini del a^m , si ottiene l'ultima si ottiene

$$(P-a^m)c^m = ma^{\frac{m-1}{c}} bc^{m-1} + \dots + mb^{\frac{m-1}{c}} ac^{m-1} + \frac{b^m}{c}.$$

se P sia intero, è tale il 1.° membro; e siccome c non esiste in b , e però appare in b^m in $b, b, b, \dots$ risulta necessariamente frazionario il a^m . D'altronde contraddice che un a^m intero sia eguale ad un frazionario, poichè ne deriva che un numero sia $= 0$ (*). Dunque il valore di $\sqrt[n]{P}$, dove P sia numero intero, non ammette un'espressione della forma $a + \frac{b}{c}$, ma è soltanto esprimibile per mezzo di una frazione decimale indefinita e non periodica.

(*) Per $a^m = \frac{a^m}{1}$ dividendo per $\frac{b}{c}$ non resta $a + \frac{b}{c}$ tale e tale, ma $a + \frac{b}{c} = \dots$

§. 52. Un radicale della forma $\sqrt[n]{V-P}$ dicesi immaginario perchè suppone un'operazione impossibile. Tal è per es. $\sqrt{-4}$, che fatta $-\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}i$, da $(\sqrt{-4})^2 = (-\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}i)^2$ si ha $-\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}i$, equazione assurda ed equivalente a $0=1$. In generale, se si assume un $a. = \sqrt[n]{V-P}$ dovrebbe esser

$$(-ax)^m = (\sqrt[n]{V-P})^m = -P$$

Ma la completa espressione di ax è $a. \beta. \gamma. \delta. \dots$ dove a, β, γ, δ ecc. son $n.$ primi, e può essere $\beta = 0, 1, 2$ ecc. $\gamma = 0, 1, 2$ ecc. ecc.: la potenza $-x^{2m}$ sarà

$$(-x \cdot x)(-x \cdot x)(-x \cdot x) \dots \text{ ecc. } \left(\frac{2m}{2} \text{ volte} \right)$$

$ax^2 \cdot x^2 \cdot x^2$ ecc. $=(x^2)^{m^{2m-1}}$, è necessariamente positiva, perchè l'indice la potenza pari a^{2m-1} del num.^o positivo x^2 , è

$$\begin{aligned} (-x)^{2m} &= (-x)^{2m \cdot \frac{a_1 \beta_1 \gamma_1 \delta_1}{n}} \text{ ecc.} = (x^n)^{2^{2m-1}} x^{\beta_1 \gamma_1 \delta_1 \dots} \\ &= (x^n)^{2^{2m-1} \cdot \beta_1 \gamma_1 \delta_1 \dots} \text{ è num.^o positivo!} \end{aligned}$$

Quindi non può essere $(-x)^{2m} = -P$ e però

$\sqrt[n]{V-P}$ suppone un'operazione impossibile.

§. 53. Un radicale si rende più facile partendo fuori del segno la radice delle potenze negative, è notandola come coefficiente del segno stesso. Così

$$\begin{aligned} \sqrt[n]{(a^2 b^2 c^2 + a^2 b^2 c^2 d^2)} &= a \sqrt[n]{(b^2 c^2 + a^2 b^2 c^2 d^2)}; \\ \sqrt[n]{(a+b)^2} &= \sqrt[n]{(a+b)^2} (a+b)^2 = (a+b)^{\frac{2}{n}} (a+b)^2 \\ &= (a+b)^{\frac{2}{n}} \sqrt[n]{(a+b)^2} = (a+b)^{\frac{2}{n}} \sqrt[n]{(a+b)^2}. \end{aligned}$$

Non si vede la poca riduzione condurre ad una più chiara e precisa indicazione della somma e della differenza fra due o più radicali. Trovati per esempio

$$\sqrt{a^2b} + \sqrt{a^2b} = (a+a^2)\sqrt{b}$$

$$\sqrt{a^2b} - \sqrt{a^2b} = a(\sqrt{b} - \sqrt{a^2b})$$

§. 39. Per moltiplicare e divider tra loro due quantità irrazionali si moltiplica i segni radicali in potenza fra loro, i numeri esponenti riduconsi al medesimo denominatore, e restituito il segno radicale comune, si opera sulle quantità sottoposte come se fossero razionali. Il risultamento, perchè gli si prefigga il stesso segno radicale, esprime quello che si richiede, ma sotto una forma ch'è sempre ben contraria alla facilità ed alla speditezza del calcolo.

$$\begin{aligned} \text{Es.}^o \text{ 1.}^o \quad & \sqrt{a+b} \times \sqrt{a-b} = \sqrt{(a+b)(a-b)} \\ & = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{a^2 - b^2} \end{aligned}$$

$$\text{Es.}^o \text{ 2.}^o \quad \frac{15\sqrt{p}}{3\sqrt{q}} = \frac{5\sqrt{p}}{\sqrt{q}} = \frac{5\sqrt{p}}{\sqrt{q}} = \frac{5\sqrt{p}}{\sqrt{q}}$$

Per passare ad una potenza p un dato radicale semplice $\sqrt[n]{P}$, siccome nel fattori del prodotto che si cerca, i radicali sono affetti dall'istesso indice, basta formare P^p/p e scrivere $\sqrt[n]{P^p}$, avvertendo di ridurre al minimo termini la frazione $\frac{pP}{n}$, seppure qualche particolare circostanza non vi si opponga. Si ha per esempio

ha

$$(\sqrt[n]{p})^m = \sqrt[n]{p^m} = p^{m/n} = p^{m/n} \sqrt[n]{p^m}.$$

L'incidente situazione tale da essere inapprop-
riata perchè non è sempre $P^{\frac{m}{n}} = P^{\frac{m}{n}}$. Infatti se

$$P = -4, m = 1, n = 2, P^{\frac{m}{n}} = \sqrt{-4}$$

$$= \sqrt{-1} \sqrt{4} = i \sqrt{4} = 2i, \text{ mentre } P^{\frac{m}{n}} = \left[\sqrt{-4} \right]^{\frac{1}{2}} =$$

mentre $P^{\frac{m}{n}}$ è $\sqrt{-4} = 2i$ e si vede che $\sqrt{-4} = 2i$,
oltre i valori immaginari $\sqrt{-4} = 2i$ compresi a
 $P^{\frac{m}{n}}$, comprende i due reali $\sqrt{-4}$.

§ 40. Le regole precedenti bastano per moltiplicare e dividere tra loro due polinomi irra-
zionali: trattandosi per esempio di appurare la
più precisa indicazione del prodotto

$$(a + \sqrt{3}x + \sqrt{5}y)(4x - 5\sqrt{2}x + 2\sqrt{3}y)$$

si opera come segue:

$$\begin{array}{r} a + \sqrt{3}x + \sqrt{5}y \\ 4x - 5\sqrt{2}x + 2\sqrt{3}y \\ \hline 4ax + 6a\sqrt{2}x + 4a\sqrt{3}y \\ - 5\sqrt{2}ax - 5\sqrt{2}x^2 - 5\sqrt{2}xy \\ + 2\sqrt{3}ay + 4\sqrt{3}x^2 + 2\sqrt{3}y^2 \\ \hline \end{array}$$

Prodotto $4ax + 6a\sqrt{2}x + 4a\sqrt{3}y - 5\sqrt{2}ax - 5\sqrt{2}x^2 - 5\sqrt{2}xy + 2\sqrt{3}ay + 4\sqrt{3}x^2 + 2\sqrt{3}y^2$.

La divisione di $6a - \sqrt{2}x^2 - 5\sqrt{2}y^2$ per
 $\sqrt{2}x - 5\sqrt{2}y$ si opera riducendo $\sqrt{2}x^2$ a $\sqrt{2}x^2$.
L'operazione è la seguente:

$$\left. \begin{array}{l} \sqrt[3]{a-5\sqrt[3]{b}} \dots 6a-\sqrt[3]{a^2b}-12\sqrt[3]{b^2a} \\ 6a-9\sqrt[3]{a^2b} \\ \hline 3\sqrt[3]{a^2b}-12\sqrt[3]{b^2a} \\ \hline 3\sqrt[3]{a^2b}-12\sqrt[3]{b^2a} \\ \hline 0 \qquad 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 3\sqrt[3]{a-} \\ \\ \\ 4\sqrt[3]{b} \end{array}$$

§. 41. In alcuni degli infiniti casi ne quali ancora in termini finiti la richiesta radice di un dato binomio, per esempio:

$$\sqrt[3]{a+\sqrt[3]{b}}, \sqrt[3]{a+\sqrt[3]{b}} \text{ ec.}$$

(dove, se $\sqrt[3]{b} = a$, si ha un binomio razionale) giura molto all'analisi lo sviluppamento della espressione in un'infinita s.^a di termini, che si succedano con una determinata legge, e ciò si ottiene mediante la formula del binomio, considerando in sua $\frac{n}{2}$ la vice di a . Ecco una limitata argomentazione induttiva, che assai bene, per essere esatta, stabilisce la verità dello sviluppamento

$$(x+a)^{\frac{n}{2}} = x^{\frac{n}{2}} + \frac{n}{2}ax^{\frac{n}{2}-1} + \frac{1}{2}\left(\frac{n}{2}-1\right)a^2x^{\frac{n}{2}-2} \dots$$

Stante $x+a = x(1+\frac{a}{x})$, la funzione della

potenza $(x+a)^n = x^n(1+\frac{a}{x})^n$, fatta $\frac{a}{x} = y$,

si può far dipendere da quella di $1+xy$. Così

l'espressione di $(1+xy)^n$ necessariamente diviene una funzione $f(my)$ di y ed m , e per esser legittimo e adeguato dee soddisfare a tutti gl'infiniti valori di m , relativi ad una potenza reale, valori che costituiscono un continuo e indefinito sistema di numeri interi e frazionari] 119

o ed ∞ . È questa una conseguenza della legge di continuità che lega i valori provenienti da una stessa formula, e può anche riguardarsi come un fatto analitico provato dall'esperienza, la quale mostra che le potenze

$$a^{\frac{1}{2}}, a^{\frac{1}{4}}, a^{\frac{1}{8}}, a^{\frac{1}{16}} \dots a^{\frac{1}{2^{n-1}}}, \dots, a^{\frac{1}{2^n}}, a^{\frac{1}{2^{n+1}}} \dots$$

cose quantità progressivo, la cui differenza diminuisce a misura che gli esponenti si avvicinano fra di loro, e da vedere altresì che tali quantità tutte si approssimano mediante la formula del binomio, tanto che n si divide in due parti, la 1.^a delle quali molto rapaci la 2.^a (*) Ne (parlandosi delle prime ipotesi) potrebbe spiegarsi come avvenga che due funzioni differenti

$$F\left(\frac{1}{2}, y\right) = (1-y)^{\frac{1}{2}}, \quad F(m, y) = (1-y)^m,$$

negli infiniti cui esponenti per $n \rightarrow 1$, $h \rightarrow m$; ed $h \rightarrow \infty$, possano divenire identiche, come dovendo per rapporto alle due

$$1-y + \frac{1}{2}m(m-1)y^2 \dots, \quad 1 + \frac{1}{1}y + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1}-1\right)y^2 \dots$$

§. 4a. Le quantità immaginarie hanno alcune singolari proprietà, da cui risultano opportune modificazioni de' finali risultamenti, ottenuti con le generali regole del calcolo. Conviene conoscere le prime e saper profittarne delle seconde.

$$\begin{aligned} (*) \text{ Si pone per } m^2 \text{ } \frac{1}{2}m(m-1)m(m-3) \dots \text{ ed } \\ (1-m(m+1))^{\frac{1}{2}} = 1 - m(m+1)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}m(m+1)^{\frac{1}{2}-1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - 1 \right) m(m+1)^{\frac{1}{2}-2} \dots \\ m(m+1) \frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2} \dots m(m+1) \frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2} \dots m(m+1) \frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2} \dots \\ m(m+1)m(m+1) \dots m(m+1)m(m+1) \dots m(m+1)m(m+1) \dots \end{aligned}$$

I. Si osserva

$\sqrt[n]{a} + (\sqrt[n]{b}) = \sqrt[n]{a} \sqrt[n]{b} = 1 + \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{b} \sqrt[n]{b} = 1$ si ha

$$\begin{aligned}\sqrt[n]{a} \sqrt[n]{b} &= \sqrt[n]{a} \sqrt[n]{b} \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a} \sqrt[n]{b} \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a} \sqrt[n]{b} (\sqrt[n]{b})^2 \\ &= \sqrt[n]{ab} = 1 = \sqrt[n]{ab},\end{aligned}$$

quindi la regola del §. cit. darebbe $\sqrt[n]{a} \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$.
E dunque reale il prodotto di un numero pari di radicali immaginari, e perciò anche ogni potenza pari di uno d'essi.

II. $(\sqrt[n]{-1})^{2m} = (\sqrt[n]{-1})^2 (\sqrt[n]{-1})^2 (\sqrt[n]{-1})^2 = (\text{mod.})$
 $= 1 \cdot 1 \cdot 1 = (\text{mod.}) = 1$, e si ha $+1$ se m è pari.

III. $(\sqrt[n]{-1})^{2m+1} = (\sqrt[n]{-1})^{2m} \sqrt[n]{-1}$ e perciò $-\sqrt[n]{-1}$.

IV. $\sqrt[n]{-1} (\text{mod.} \sqrt[n]{-1}) = -\sqrt[n]{-1}$ se m è dispari, perchè $\sqrt[n]{-1} = -1$ si cambia in $-1 \div -1$ mediante la potenza $m-1$ dell'uno o dell'altro membro; Ma se m è pari non si vede se e come $\sqrt[n]{-1}$ possa esprimersi per $\sqrt[n]{-1}$.

Sia $\sqrt[n]{-1} = a + b\sqrt[n]{-1}$, e si ottiene

$$(\sqrt[n]{-1})^2 = (-1)^2 = (-1)^2 = 1 = \sqrt[n]{-1},$$

facendo il quadrato dell'equazione ipotetica si avrà

$$\sqrt[n]{-1} = a^2 + b^2 + 2ab\sqrt[n]{-1}.$$

Il rispettivo paragone de' termini razionali e degli irrazionali fra loro (§. 2) dà

$a^2 + b^2 = 1$, $2ab\sqrt[n]{-1} = 2ab\sqrt[n]{-1}$, cioè $b = 0$, $a = 1$

$a^2 = 1$, $a = 1$, $a = \sqrt[n]{-1} = \frac{\sqrt[n]{-1}}{\sqrt[n]{-1}} = \frac{1}{\sqrt[n]{-1}} = \sqrt[n]{-1} (-1)$:

quindi $\sqrt[n]{-1} = \sqrt[n]{-1} (1 + \sqrt[n]{-1})$ e però

$$\sqrt[n]{V-1}(\alpha\sqrt[n]{V}\sqrt[n]{V}-1)=\left[\alpha\sqrt[n]{V}(V+V'-1)\right]^{\frac{1}{n}},$$

espressione identica.

V. Da facile sperimento dimostra, che lo sviluppo della potenza $\frac{1}{n}$ del binomio

$\frac{1}{\sqrt[n]{V}}=\frac{\sqrt[n]{V}-1}{\sqrt[n]{V}}$, è composto di due serie di termini, una reale, l'altra moltiplicata per $\sqrt[n]{V}-1$, e siccome si gli uni che gli altri vanno decrescendo, chiaramente appare che ciascuna equivale ad una quantità finita. Si supponenti la somma della 1.^a per A , quella della 2.^a per B , e si avrà $\sqrt[n]{V}-1=\alpha A+B\sqrt[n]{V}$.

Quasi ogni radicale nullo immaginario, il cui simbolo è

$$\alpha\sqrt[n]{V}-1\alpha\sqrt[n]{V}-1\alpha\sqrt[n]{V}-1\text{ ec.} \dots (7)$$

può ridursi alla semplicissima forma $A+B\sqrt[n]{V}-1$. Infatti, se m, n, p ec. sono dispari, la proposta funzione si riduce in

$\alpha\sqrt[n]{V}-1\alpha\sqrt[n]{V}-1\alpha\sqrt[n]{V}-1\text{ ec. cioè } \alpha\alpha(\beta+\gamma\alpha^2\text{ ec.})\sqrt[n]{V}-1$. Essendo $m=2\mu, n=2\nu, p=2\pi$ ec. ciascuna dell' espressioni

$$\alpha\sqrt[n]{V}-1\alpha\sqrt[n]{V}-1\alpha\sqrt[n]{V}-1\text{ ec.}$$

si trasforma in uno dei rispettivi binomi

$$A_1+B_1\sqrt[n]{V}-1, A_2+B_2\sqrt[n]{V}-1, A_3+B_3\sqrt[n]{V}-1, \text{ ec.}$$

e basta supporre nella loro somma

$$A_1+A_2+A_3\text{ ec.}=A, B_1+B_2+B_3\text{ ec.}=B$$

Qualunque numero di fattori analoghi alla (7), combinata insieme con le operazioni del calcolo, conduce ad un risultamento finale, riducibile anch' esso alla nota forma. Infatti

$$(\alpha\sqrt[n]{V}-1)(\alpha\sqrt[n]{V}-1)\alpha\sqrt[n]{V}-1=\alpha\alpha(\beta+\gamma\alpha)(\beta+\gamma\alpha)\sqrt[n]{V}-1$$

$$\frac{a+bV'-1}{a+bV'-1} = \frac{(a+bV'-1)(a+bV'-1)}{(a+bV'-1)(a+bV'-1)} = \frac{a^2-1}{a^2-1} + \frac{(a+b)(a-b)}{a^2-1} V'-1$$

Nella suddetta riduzione si suppone lo sviluppo

$$a^m + ma^{m-1}bV'-1 + \frac{m(m-1)}{2}a^{m-2}b^2V'^2 - \\ - \frac{m(m-1)(m-2)}{6}a^{m-3}b^3V'^3 + \text{ec.}$$

di $(a+bV'-1)^m$, perchè può concepirsi a ed b come, qualunque sia, due termini reali, ed a è quella dei termini affetti da $V'-1$, d'onde se deriva che qualunque combinazione delle quantità

$(a+bV'-1)^m$, $(a+bV'-1)^n$ ec., anche nell'ipotesi che a, b , ec. sian numeri irrazionali e trascendenti, ammette la riduzione di cui sopra.

Daunque ogni espressione immaginaria ed ogni combinazione di tali espressioni, è riducibile alla forma $A+BV'-1$. Questo utile teorema di *L'Alambert*, merita una completa dimostrazione. A cui lungo si vedrà che essa si applica alle funzioni trascendenti (logaritmiche, trigonometriche ec.)

»

CAPITOLO VII.

De' Logaritmi.

§. 43. Se nell'equazione $a^x=y$, dove a si suppone un n.° dato, si sostituiscono per x diversi n.° progressivi, si sa che diversi e progressivi risultano i valori di a^x ossia di y . Da $x=0$ sino ad $x=1$ esistono infinite frazioni, e ad esse corrispondono altrettanti valori di y . Si ha per es.°

$$\begin{aligned} 64^{\frac{1}{2}} &= 8(2^3); 64^{\frac{1}{3}} (= 4^{\frac{1}{2}} 2) = 4, 2^{\frac{1}{2}}; 64^{\frac{1}{4}} = 2, 2^{\frac{1}{2}}; \\ 64^{\frac{1}{5}} &= 2, 2^{\frac{1}{5}}; 64^{\frac{1}{6}} = 2, 2^{\frac{1}{3}}; 64^{\frac{1}{7}} = 2, 2^{\frac{1}{7}}; 64^{\frac{1}{8}} = 2, 2^{\frac{1}{4}}; \\ 64^{\frac{1}{9}} &= 2, 2^{\frac{1}{9}}; 64^{\frac{1}{10}} = 2, 2^{\frac{1}{10}}; \text{ec. ec.} \end{aligned}$$

Per la stessa ragione infatti per uno i valori di x tra 1 e 2; tra 2 e 3 ed. a ciascuno dei quali corrisponde un particolare valore di y .

Lasciati da parte i valori frazionari e decimali di y , e prescelta per a un a° molto comodo, per esempio $a=10$, può curarsi qual dubbio esser a perchè 10° multi $101, 2, 3, 22$ e questo immenso lavoro fa in gran parte udito da *Exercise Briggs*. Quel a° che sostituisce per x in 10° produce un determinato a° , come 100 produce $10^2=100$, 1000 produce $10^3=1000$, ec. dicesi *logaritmo* del rispettivo a° y ; e si scrive $\log a, y$; quindi, nel sistema della base 10 , è $\log 100, \log 1000$, ec. Sapperto costanza il a° a , (base del sistema logaritmico,) il valor di y resta determinato da quello di x ; ma variando x si trova che alla stesso x corrisponde un diverso y . Per esemp. $a=2$ dà $2^2=4$, $2^3=8$ ec. e nel sistema della base a è due il logaritmo di 4, tre quello di 8 ec.

La molteplicità della base rende inutilmente ed inutile, i Geometri ne hanno prescelta due, entrambe opportunissime, una delle quali è $a=10$, e costituisce il sistema de' logaritmi volgari, detto anche sistema tabulare. Or si vede che il logaritmo altro non è che l'esponente della potenza a cui bisogna moltiplicar la base per formare un dato numero intero.

§ 44. Passiamo intanto a vedere i semplicissimi principi della teoria logaritmica.

1.^a Essendo $a^x = 1$, la ogni divisione è zero il logaritmo dell'unità.

2.^a L'eq. $a^x = a^x (= y)$ dimostra che il logaritmo della base, qualunque ella sia, è uno.

3.^a Quando x diventa $x+h$, dove h si suppone un n.^o finito progressivamente crescente, il n.^o y si trova rapido aumento: nascono il contrario allorché si cambia x in $x-h$, ma per queste osservazioni h mai non risulta $y=0$, perchè

$a^{-x} \left[= \frac{1}{a^x} (10) \right]$ annulla soltanto quando $x=0$.

4. 45. Siccome $x=y$, si può scrivere $a^x=y$. Siano b, c due determinati valori di y onde abbiano $a^b=b, a^c=c$. È chiaro (o n.^o III) che moltiplicando un'equazione per l'altra risulta

$a^{b+c} = bc$; ora l'esponente $b+c$ è (45) il logaritmo di bc : dunque $b+c = \log bc$.

Mediante la moltiplicazione dell'equazioni

$$a^b=b, a^c=c, a^d=d,$$

si ottiene

$$a^{b+c+d} = bcd, \text{ di onde } b+c+d = \log bcd, \text{ e co-}$$

si 46. Dunque il logaritmo del prodotto di un finito equivale alla somma de' logaritmi di ciascuno, e per fare il prodotto bcd — basta sommare i rispettivi logaritmi di b, c, d ec., e cercare nelle tavole il numero corrispondente. Così

$$\begin{aligned} \log 59 \times 57 &= \frac{1}{2} \begin{array}{r} \log 59 = 1,7708500 \\ + \log 57 = 1,7558997 \\ \hline 3,5267497 \end{array} \\ &= 5,7483747 \end{aligned}$$

ed il numero corrispondente 3585 è appunto il prodotto di 59 per 57.

§. 46. Si ha pure $\frac{a^b}{a^c} = a^{\frac{b}{c}}$, cioè $(\frac{a}{a^c})^{1/c} = a^{\frac{b}{c}}$;

quindi $1b-1c=1\frac{b}{c}$, e perciò, alla divisione di un numero per un altro può sostituirsi la sottrazione de' rispettivi loro logaritmi: la differenza è il logaritmo del quoziente.

Per es.^a $\log. \frac{2781}{274} = \log 2781 - 1.577 = 3.443757$
 $- 1.577 = 1.866757$, ed il numero corrispondente a questo logaritmo è precisamente il quoziente richiesto 59.

§. 47. Facendo nelle rispettive equazioni

$$1b-1c=1b; \quad 1b-1c+1d=1bcd;$$

$$1b-1c+1d+1e=1bcde, \text{ ecc.}$$

ciascuna dei numeri $a, b, c, \text{ ecc.} = m$, risulta

$a^1 b^1 c^1 d^1 e^1 = 1^1$ di $b^2 = b^2$, ecc. e perciò $m^1 b^1 c^1 d^1 e^1$, qualunque numero intero positivo si ponga per m . Una semplice moltiplicazione $m^1 b^1 c^1 d^1 e^1$ basta dunque per formare qualunque potenza $m, m^2, \text{ ecc.}$

Per es.^a $1b^2 = 1116 = 500.77756 = 3.69755$,
 ed il n.^o corrispondente a $3.69755 + 77756 (= 5^2)$.

L'equazione $a^{\frac{p}{q}} = x$ dove p, q si suppongono interi e primi fra loro, essendo la potenza q d'entrate i membri, diviso $a^p = x^q$: quindi plainly x è però

$$\sqrt[q]{a^p} = a^{\frac{p}{q}}.$$

Dunque il logaritmo di qualunque monomio numerico irrazionale $a^{\frac{p}{q}}$ si appura come quello di una potenza intera a^p .

Vogliamo $\sqrt[5]{6561}$. Scriviamo $6561^{\frac{1}{5}} = \frac{1}{5} 6561 =$

$\frac{1}{5} \times 3,816990 = 0,763398$ ed il numero corrispondente è 3, dice essere $\sqrt[5]{6561} = 3$.

§ 43 Oltre le prerogative sopra indicate, parecchie altre al calcolo logaritmico ne competono, tutte insigni e rilevanti.

I. Porgi un facil metodo per ritrovare il numero delle cifre componenti una data potenza a^m , poiché chiamando x il numero cercato, dev' essere

$$a^m \text{ tra } < 10^{x-1} \text{ (min. n.° d' } x \text{ cifre)}$$

$$a^m < 10^x \text{ (minimo n.° d' } x+1 \text{ cifre)}$$

Dal 1.° rapporto deducesi $m \log a \text{ non } < x-1$ (perchè $\log a > 1$) quindi $m \log a + 1 \text{ non } < x$, cioè $x \text{ non } > m \log a + 1$. Il 2.° dà $m \log a < x$ cioè $x > m \log a$. Dunque il numero richiesto è l'intero prossimo $> m \log a$. Quanto sono le cifre componenti 1000^4 ? Appare $4 \log 1000 = 12,475671 = 12,475671$ e dice che le cifre sono 13. Infatti si ha

$$1000^4 = 7145000000000.$$

II. Di speditamente il prossimo valore delle radici numeriche.

III. Facilmente condurre al prossimo valore di qualunque complicata formula. Trattandosi per esempio di appurare $\frac{N \sqrt{a}}{b}$ fa $\frac{N \sqrt{a}}{b} = m$ e deduce

$$N \sqrt{a} = b m \quad \text{cioè} \quad b + \frac{1}{2} b^2 a = b^2 m^2 = l. a = l. a.$$

IV. Serve a calcolare qualunque potenza, come

$$(1,718)^{1,234} : \text{ basta osservare che } l. 1,718 = l. 1, \frac{1,718}{1,000} = l. 1,718 - l. 1,000 = l. 1,718 - 0,434294 =$$

Completata l'operazione, si trova $2,5458825$ logaritmo a cui corrisponde presso a poco $55,45$. (*)

V. Ha il pregio esclusivo di risolvere tutte l'equazioni comprese nella formula $x^{p+q}=b^{p+q}$, infatti si ha

$$(px+q)x \cdot a=(px+q)f \cdot b, (pf \cdot a-xf \cdot b)x=a \cdot b-pf \cdot a$$

$$\text{e però } x=\frac{a \cdot b-pf \cdot a}{pf \cdot a-xf \cdot b}=\frac{b^p}{f^p} \cdot \frac{a^p}{f^p}.$$

Fatto b^p uno si risolve con eguale facilità a^p uno. Cerchisi la final espressione di x .

§. 56. Il tipo del sistema tabulare a Belgarda
 $I. 1=0, I. 10=1, I. 100=2, I. 1000=3, \text{ec.}$
 $10^1=1, 10^2=20, 10^3=200, 10^4=2000, \text{ec.}$
 dimostra che il log. de' numeri compresi fra 1 e 10 è necessariamente una frazione; che quello de' numeri fra 10 e 100 è $1=1$ + una frazione e così via. L'inciso che fa parte di un logaritmo diceasi caratteristico, la frazione addizionale mantissa o sia giunta. Restava a provare che la mantissa è sempre un retto decimale infinito, non periodico.

Supponendo $x^{\frac{m}{n}}=y$, dove $\frac{m}{n}$ sia un numero frazionario fatto ad us, n numeri primi fra loro, estratta la potenza n di questo numero si ottiene $x^m=y^n$ ed estratta la radice m^{tesima} risulta $x=y^{\frac{n}{m}}=\sqrt[m]{y^n}$, cioè un numero razionale o uguale ad uno irrazionale, giacchè $y^{\frac{n}{m}}=y^{\frac{1}{\frac{m}{n}}}$, $y^{\frac{1}{\frac{m}{n}}}$

(*) Nella *Tabula del Calo* (T. I. p. 112) abbiamo scritto $55,458825$, ma per tal raffinamento d'approssimazione si crede un numero che non contiene a questo libro.

è necessariamente un decimale indefinito, e tale per conseguenza una sua potenza qualunque.

La caratteristica è composta di tante unità quante sono le cifre, meno una, del numero a cui spetta. Da 10 a 99 inclusivamente la caratteristica è 1; alla 100 e da 100 a 999 è così via.

Per rapporto alla mantissa deve notarsi ch'ella le si conserva la stessa per tutti gl'istessi numeri $\frac{n}{1000}, \frac{n}{100}, \frac{n}{10}, n, 10n, 100n, 1000n, \dots$

Così $10,2 = 1,301030, 100,2 = 2,301030, 1000,2 = 3,301030$
 $10000,2 = 4,301030, 100000,2 = 5,301030$ ec. ec.

§. 51. L'espressione $L.a-L.b$ (col. $\frac{a}{b}$) dà vedere che il logaritmo di un cotto è negativo. Per non essere arrestati da questa sorta di logaritmi, alle tavole del tutto astruse, bisogna dunque investigare un opportuno ripiego, e l'esempio che segue ne darà pieno contento.

Trovandosi di dover apporre la frazione $\frac{15 \times 11}{1139}$

$$\text{si deduce } \begin{cases} \log. 15 = 1,17609125 \\ \log. 11 = 1,04139268 \\ \hline \text{somma } 2,21748393. \end{cases}$$

Aggiunta un'unità alla caratteristica (se ne aggiungerebbero due se non bastasse a cui ec.) si prende la differenza

$$\begin{array}{r} 3,8855614 \\ - 2,21748393 (= L.155) \\ \hline = 1,66807747. \end{array}$$

Questa mantissa non trovandosi nel principio delle tavole, ove i logaritmi progressione per differenze molto sensibili, si cerca verso il fine di esse, e se le tavole che si possiedono non ristrette, si vede il logaritmo $4,164581$, che apper-

§. 53. Quantunque le tavole de' logaritmi sieno già costrutte, giova occasione l'appagante formula, da cui l'analisi moderna ha saputo dedurre le costruzioni non solo, ma qualunque più ardito perfezionamento della medesima; tanto più che l'agguata formula ci aprirà la strada ad una breve e facile discussione del secondo sistema logaritmico, venuto adoperato de' Geometri.

Si è veduto che per una data base il valor d' x dipende da quello d' y e viceversa, cioè che x , vista L, y , è una funzione d' y . Sia per esempio $y=1+n$ e supponesi

$$f(1+n)=Aa+Ba^2+Ca^3\ldots+Pa^n\ldots (1)$$

dove si prescinde da qualunque termine indipendente da a , perchè, dovendo essere $f(1+a)=L, a=0$, dall'ipotesi $a=0$ dee risultare l'avanzamento dell'uno e dell'altro membro, si esclude ogni potenza negativa di a , perchè un termine Ba^{-p} ($p=\frac{1}{2}$) di-

viene infinito, quando $a=0$ la stessa il 1.^o membro. Se si ricerca da determinarsi con legittimo metodo qualsivoglia numero di consecutivi coefficienti, A, B, C , co. saremo assicurati che l'avanzata espressione (1) è realmente esprimibile. Sostituendo in (1) $na+na^2$ per a si ha

$$f(1+na+na^2)=Aa+Afna^2+Bfna^3+Bfna^4+na \\ +4Bfa+4Cf+12Cf \\ | \quad | +16Cf$$

D' altronde

$f(1+na+na^2)=f(1+na)+nf(1+na)$, cioè
 $f(1+na+na^2)=Aa+Ba^2+naCa^2+naDa^3\ldots+na^pPa^p$
 e perchè non può supporre $f(1+na)$ espresso con due funzioni diverse $Aa+Ba^2\ldots; A_1a+B_1a^2\ldots$, altrimenti, rappresentebbe due diversi valori, lo

che contraddice, la 1.^a espressione di $K(1+an+a^2)$ deve coincidere con la 2.^a; ma non si può supporre soddisfatta per qualunque valore di a l'equazione identica $Aa+Bn^2Cn^2$ od. $an+A_1a+B_1a^2+C_1a^3$ od. senza che lo stesso si verifichi per ogni determinato valore di a in

$(A-A_1)a+(B-B_1)a^2+(C-C_1)a^3$ od. an od. in $A-A_1+(B-B_1)a+(C-C_1)a^2$ od. an , e questa seconda non dà $A_1=A$ se si sopprime $A-A_1$ e dividendosi per a , la stessa ipotesi si può dimostrare dover essere $B_1=B$, ec.; dunque riguardando, il che è permesso, come un solo numero A_1 , B_1 od. il rispettivo coefficiente di a^2 , a^3 od. nella 1.^a espressione di $K(1+an+a^2)$, può e deve sup-
porli

$A+4B=4B+4B+8C=4C_1B+4C+16D=4D$, od. cioè $A+4B=0$, $4B+16C=0$, $B+4C+16D=0$ od. d'onde $B=-\frac{1}{4}A$, $C=-\frac{1}{8}B=-\frac{1}{32}A$, $D=-\frac{1}{64}A$, ec. e però

$$K(1+a)=A\left(1-\frac{1}{4}a^2+\frac{1}{8}a^2-\frac{1}{32}a^2+\frac{1}{64}a^2-\dots\right) \quad (1)$$

dove A resta indeterminata perchè tale sia qui si è lasciata la base, e dieci modulo del denominatore. Presto vedremo come si determini nel due sistemi adoperati dagli analisti, e qual rapporto abbia con la rispettiva base.

§. 54. Se i termini dell'espressione (1) andassero successivamente diminuendo con tale rapidità, che dalla somma di alcuni potesse il prossimo valore di $K(1+a)$ assai felicemente raccogliersi, il problema sarebbe risolto: ma siccome si verifica precisamente il contrario, si è d'uopo immaginare qualche artificio onde ottenere una stessa trasformazione dell'espressione (1).

Dopo di avere osservato che cambiando a in $-a$ la (1) diviene

$$A(x-a) = -A(x-a)\frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}a^2,$$

ponendo la differenza tra questa equazione e la (1), e ricordandosi che $La-Lb$ è $-\frac{1}{2}a^2$, scritto

$$\frac{L-a}{1-a} = A(x-a)\left(\frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}a^2\right) + \dots (2)$$

Avvertito adesso che l'espressione del logaritmo di qualunque determinata numero $1-a$, perchè detta di numeri, non lascia di essere identica qualunque sia una termine sia La , perchè facendo $a=1, a=2, a=3$ ecc. risulta La dipendente da $La=0, L3$ da La già trovata, e così in seguito.

Tanto dunque la sostituzione di $\frac{1-a}{1-a}$ in vece di

$$\frac{1-a}{1-a},$$

e quindi l'equazione $\frac{1-a}{1-a} = \frac{1-a}{1-a}$ dà per a

una tal'espressione in a , che sostituita in (2), ne porgeva nel secondo membro quel rapido decrescimento che si desidera, non certo che avrà il rialtamento a cui si mira.

L'equazione $\frac{1-a}{1-a} = \frac{1-a}{1-a}$, moltiplicandola per

$a(1-a)$ si rimpia in

$$(1-a)a = (1-a)(1-a) \text{ ossia } a - 1 + a = 1 - a + 1 - a - a^2,$$

e soppresso a si riduce a $-1 + a = 1 - a - a^2$, cioè

$$(1-a+1)a = 1, \text{ d'onde } a = \frac{1}{2a+1}. \text{ Fatta la sostituzione in (2) si ha}$$

$$\frac{L-a}{1-a} = A\left(\frac{1}{2a+1} + \frac{1}{2(2a+1)} + \frac{1}{2(2a+1)} + \dots\right)$$

ossia

$$J_1(1+\alpha) \cos(\theta + \alpha) \left(\frac{1}{\gamma_{\max} + 1} + \frac{1}{\gamma_{\min} + 1} \right) \sin(\theta) = 0 \quad (9)$$

formole opportunistissime, qualora facciati $A=1$, nel qual caso usa di i logaritmi naturali, detti anche Napieriani, perchè immaginati e ridotti a calcolo da Napiero, Barone Burghese. Non si ha che da moltiplicare successivamente 1, 2, 3, ecc. per a onde avere tutti all'infinito i logaritmi del sistema Napieriano; Si trova per esempio

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \dots \right) = 0.5 \ln(1.718)$$

$$4.5 = \log_2 x + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \dots \right) \Rightarrow x = 1, \log_2 16 = 4$$

For more information, contact us at 1-800-451-7535

$$4.5 \text{ and } 4 + \alpha \left(\frac{1}{9} + \frac{1}{8} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} \right) \text{ or } \dots = 1.509(329)$$

$$10^{-10} \times 5 \times 10^{-10} = 5 \times 10^{-20}$$

Latent(1.5)mls=100 2013-05-06-09

[illegible]

[108] 69774

5. 56. L'idea, che le anteposte sociali ci hanno data del sistema Bergson e Neperiano, è essenzialmente manichea, perché del primo non conosciamo il modello, parte essenziale della formula $(\pi)^2$ del secondo ignoriamo la base, la cui negazione è in conflitto con l'armonia.

Detta e la base Neperiana è certo che esiste un valore di δ e di α , soddisfacente alle requi-

[illegible]

tre equazioni $10^k = l$, $e^k = l$, dove l si suppone qualunque numero dato. Nella prima $k = l^{\frac{1}{k}}$, $e = l^{\frac{1}{k}}$ nella seconda (*), e preso il logaritmo naturale dell'equazione $10^k = l$ ottienasi $k \cdot L^{\frac{1}{k}} = \log l$ cioè

$$L^{\frac{1}{k}} = \frac{\log l}{k} \quad L = \left(\frac{\log l}{k} \right)^k \quad L = 0,43429448 \cdot l^{\frac{1}{k}} \quad L = l^{\frac{1}{k}} \cdot 0,43429448.$$

Dunque $A = 0,43429448$ è il modulo del sistema abaziale, cioè quel numero che si deve moltiplicare in (15) per avere i logaritmi di cui si tratta, e che moltiplicato pel logaritmo naturale produce il valore. Questi può dunque calcolarsi direttamente per mezzo della seguente formula.

$$\log(1+x) = \log 1,1 + 43429448 \left\{ \frac{1}{1,1x+1} + \frac{1}{2} \frac{1}{(1,1x+1)^2} + \right. \\ \left. + \frac{1}{3} \frac{1}{(1,1x+1)^3} + \dots \right\}$$

§. 56. Dato un logaritmo trovare il suo numero è un problema assai più difficile, che nel contemplato nella 5a, del Calo. (T. I. §. 137.) La soluzione che possiamo adoperare, è approssimativa soltanto per li piccoli logaritmi, per cui non maggiori di 1,0, ma in compenso ha il pregio di servire alla determinazione della base Neperiana ed alla enunciazione di una formula interessante.

Sia x il logaritmo naturale dato, $1+a(-x)$ il numero che si cerca a parer $e^x = ay$, e si tratterà di trovare un'istessa funzione di x che possibilmente esprima il valore di a , funzione, che per le ragioni addotte (§53) rappresentiamo al co-

(*) l è dato abaziale, o. Neperiano.

tro per $u = Ax + Bx^2$ ecc.

Siccome $y = (1+x)u = (1+\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x^2)$ ecc., sostituito la poss. espressione di u , si ha componendo x ,

$$\begin{array}{r|l} \text{con } A \left| x + B \right| x^2 + C \left| x^2 + D \right| x^2 + \text{ecc.} \\ -1 \left| -\frac{1}{2}A^2 \right| -AB \left| -\frac{1}{2}B^2 \right| -AC \\ \qquad \qquad \qquad -\frac{1}{2}A^2 \left| -AB \right| -\frac{1}{2}B^2 \end{array}$$

Quindi (§. cit.)

$A=1$, $B=\frac{1}{2}A^2$ ecc., $C=AB+\frac{1}{2}A^3$ ecc., ecc. cioè

$$A=1, B=\frac{1}{2}, C\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}, D\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{24}$$

ecc. ecc. e però $1+x$ sarà

$$y = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^6}{720} + \dots + \frac{x^{2n}}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n}, \text{ vale a dire}$$

$$y = 1 + y + \frac{y y^2}{1 \cdot 2} + \frac{y y^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{y y^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \dots + \frac{y y^n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n} \dots (x)$$

espressione elegante, ma che diventa inutile se $1/y$ non è una piccola, perchè i termini troppo lentamente decrescono, e bisogna sommarne molti ed anche moltiplicarli per ricavarne il preciso valore di y .

Potendo y esser qualunque supponga $u = a$, e si avrà (§ §. n.° 1.°)

$$u = 1 + u + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{24} + \frac{1}{720} \dots \text{ ecc. } y = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + \dots$$

d'onde, posto a per y ,

$$a = 1 + a + \frac{a^2}{1 \cdot 2} + \frac{a^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{a^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \dots (y)$$

È facile il verificare che l'equazione (x) molto bene s'adatta a tutti i valori di y , inclusive-mente compresi fra 1 e ∞ , e ciò prova a posteriori la legittimità dell'ipotesi

$$u = Ax + Bx^2 + Cx^3 \dots$$

§. 57. La tavola logarithmica essendo necessariamente limitata, e procedendosi in modo d'aumentar fratti che sono inferiori fra 0 ed 1, come pare dai frazionari, infatti perimento anche fra 1 e 2, si rende necessario un adattamento artificiale per supplire in pratica a tutti i bisogni del calcolo.

Sappiamo che il massimo numero delle tavole sia 100 mila e che per apparire una formula si richieda $1,10785000 + \beta$. Spostato il numero in $10785000 + \beta$ della formula (a) (54), mediante l'ipotesi $\frac{1-\alpha}{1-\alpha} = \frac{\alpha+\beta}{\alpha}$ che dà $\alpha = \frac{\beta}{\alpha+\beta}$, si trova

$$K(\alpha+\beta) = L\alpha + \alpha A \left\{ \frac{\beta}{1+\alpha\beta} + \frac{1}{2} \frac{\beta^2}{(1+\alpha\beta)^2} + \dots \right\},$$

in questa fa $\alpha = 10785000$, $\beta = 975$, e siccome si trova

$$L10785000 = L10785 + L10000 = 5 + L10785 = 7,024680,$$

$$L10785 + 975 = 7,024680 + 0,000088 \left(\frac{975}{1,10785} + \dots \right) = 7,024768$$

dove ho soppresso il 5.^o termine dentro la parentesi perchè la sua prima cifra significativa è dell'ordine decimoquinto.

§. 58. Debbono ora trovare $L1,10785000$.

Se togliasi la virgola zero per logaritmo

$$1,107850000 \dots$$

Ma cinque posti della virgola zero la danno equivalente alla moltiplicazione per 10000 ed il logaritmo di 10000 è 5: basta dunque che si divida di 5 il logaritmo proc. e 1,024... sarà ec. Se, tolta la virgola, il numero non di-

trovare la cifra delle tavole, l'operazione è brevissima.

Così $\log 0,718 = \log \frac{718}{1000} = 3,454449 - 3 = 0,454449$.

Merita speciale osservazione il caso che il numero proposto non abbia cifra significativa innanzi alla virgola, come se vogliasi $\log 0,4$, perchè $\log 4 = 0,60206$, cioè $0,60206 - 1$, risulta negativo.

Il ripiego più semplice al numero quello di scrivere la caratteristica negativa, per esempio $\log 0,4 = -1,39794$, con l'avvertenza di usare sempre la caratteristica anche i logaritmi decrescenti positivi quando in di essi effettuare qualche operazione. Se per es.° vogliasi appunto coi logaritmi il prodotto $0,75 \times 0,4$, giova trasportare nella seguente maniera:

$$\log 75 = 1,875061 - 2 = -1,875061$$

$$\log 4 = 0,4 - 1 = -0,602060 - 1 = -1,602060$$

Sopprimi la caratteristica, il che suppone un aumento di due unità, la somma è $1,477121$.

Scrivendo $0,477121$ (= $\log$ di 3) avrai 3 per prodotto, ma perchè dei supplementi un'altra unità dico come $0,75 \times 0,4 = 0,3$.

§. 39. I sistemi di Briggs e di Nepero sono preferibili a tutti, il primo per l'opportunità della base, ed esclusivamente si adopera ne' computi trigonometrici, il secondo per la semplicità del modulo, e serve costantemente al Calcolo integrale.

Le seguenti tavole, per cui alla moltiplicazione viene sostituita la somma, abbreviano il passaggio dall'una all'altra sistema e sono in pratica utilissime. Per evitare ogni equivoco basta solo avvertire che mentre

$$a.d=0,8685...; c.d.a.b=0,08685...; c.d=0,008685... \\ \text{e viceversa } a.d=8,685...; c.d.a.b=85,85...$$

Come pure che dall' essere

$\frac{1}{2} = 0,5000$ deriva $\frac{1}{2} = 0,5010$, $\frac{1}{2} = 0,5020$.

TAVOLA I

$A=0$, 53429 44813 ; $A=1$, 50258 89658 ;
 $B=0$, 50258 89658 ; $A=2$, 45717 99296 ;
 $B=1$, 45717 99296 ; $A=3$, 40206 58924 ;
 $A=4$, 34725 18553 ; $B=2$, 40206 58924 ;
 $A=5$, 29265 08171 .

TAVOLA II

$\frac{1}{2} = 2$, 50258 50258 ; $\frac{1}{2} = 4$, 40206 08171

$\frac{1}{2} = 6$, 29265 50258 ; $\frac{1}{2} = 8$, 18553 08171

$\frac{1}{2} = 10$, 50258 53429 ; $\frac{1}{2} = 12$, 50258 08171

$\frac{1}{2} = 14$, 18553 53429 ; $\frac{1}{2} = 16$, 40206 08171

$\frac{1}{2} = 18$, 29265 58924 .

CAPITOLO VIII

Proporzioni, e progressioni.

§. 46. Due ragioni esprimenti un'egual differenza ed un egual grado di molteplicità o semimoltiplicità fra loro omogenee, costituiscono una proporzione (*). Nel primo caso la proporzione dicesi aritmetica e la sua formula è

(*) La ragione « dicesi semplice, e un tale rapporto si denominerà di due grandezze della stessa specie, per quanto si appartiene alle grandezze, cioè indipendentemente da qualunque modificazione che possa compiere alla grandezza stessa. Nella seconda parte poi si riguarderà come semplice la modificazione del tempo, come è usuali, la velocità, la forza ecc.

$$\frac{a}{b} = \frac{a+d}{b} : \frac{b+d}{b} \dots (1)$$

dove la somma de' termini estremi $a+b+d$, eguaglia quella de' medj, $a+d+b$: essa mostra che può essere $b=a+d$ cioè

$$\frac{a}{a} = \frac{a+d}{a+d} = \frac{a+d}{a+d},$$

nel qual caso la proporzione diventa costante.
La formula delle proporzioni geometriche è

$$\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'} : \frac{b}{b'} \dots (2)$$

perchè $\frac{a}{b} \cdot \frac{b'}{b} = \frac{a'}{b'}$ la cui è $a \cdot b' = a' \cdot b$ cioè il prodotto de' medj eguale a quello degli estremi; e fatto $b' = a$ ha la proporzione costante $a : a' :: a : a'$.

Come dalla proporzione $a : b :: c : d$ deriva $ad = bc$, così da un'equazione della forma $px = q$ deducasi la corrispondente proporzione, poiché dividendo $ad = bc$ per b si ottiene $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ cioè ac .

Si scrive $px = q$ per esprimere la ragione diretta tra le quantità e grandezze x, a , tale cioè che ad px ed $\frac{q}{x}$ rispettivamente corrisponda $ax, \frac{q}{x}$. La stessa è il simbolo della ragione inversa, per cui la x divide ax quando a si spiega in $\frac{q}{x}$: tal condizione infatti è unica e indispensabile onde si abbia $T \cdot \frac{q}{x} = ax$, dove T rappresenta la grandezza x dopo la variazione di a .

Decrescendo a oltre ogni limite assegnabile, nel qual caso dicasi infinitesimo e si scrive $ax = \frac{q}{\infty} = 0$,

l'equazione $\frac{q}{x} = ax$ diviene $\frac{q}{x} = 0$ ossia $ax = 0$.

Basta ricordarsi che il quoziente cresce nella ragione con cui diminuisce il divisore e viceversa.

La formula $M.N. : ac \dots \frac{ac}{x}$ significa che M sta ad N nella ragione composta di $a:b$, di $a:d$, di c $\frac{c}{x}$ ac.

§. 61. Dopo l'esposizione preliminare di som-
ma riportata ed in parte necessaria, un breve
e facile saggio sulla metafisica delle proporzioni;
argomenti con singolar' esattezza e profondità di-
scusso dal senno Euclideo, a' d' nostri, come un
oggetto che può di modo, trascurato antichia-
mente (*).

L. Fra le molte variazioni e modificazioni che
posson farsi ne' termini di una proporzione geo-
metrica salva la proporzionalità, son notabili le
seguenti.

Avendosi $a:b :: x:d$ risulta

$ax :: bd$ (alterando)

$bx :: ad$ (invertendo)

$a+b :: x+d$ $\left\{ \frac{ax}{x} : \frac{bd}{x} \right\}$ componendo

$a-b :: x-d$ $\left\{ \frac{ax}{x} : \frac{bd}{x} \right\}$ dividendo

Se $ax :: bx$ è anche ad $a+b :: b+d$: discorrendo dall' equa-
zione $a+b :: x+d$ risulta anche ad $ax :: bx$, dunque

III. Due quantità che abbiano lo stesso rappor-
to ad una terza sono eguali e viceversa.

Poss. che abbiano $\frac{ax}{x} :: \frac{bx}{x}$ unite $a:b :: x:f$

perchè $\frac{a}{x} = \frac{b}{x} = \frac{a}{f}$: perchè

(*) Il professor Giovanni Roberto Simpson, allorchè alla data
lezione delle proporzioni insegnate da Euclide, esser' egli
stesso in tal circostanza opera, proporzionale discusse tal-
lora istruendo, talora confutando, accorrendo peraltro.

III. Le quantità proporzionali a due quantità, qualunque sia il numero delle prime, sono proporzionali tra di loro.

Dall'essere $ab:ac::ad:ae$ deriva

IV. Che due o più quantità stanno come i simili loro moltiplici e sottomultipli.

Stanno $\frac{a}{c}:\frac{b}{c}::ac:ab::c:b$

V. Due reati aventi lo stesso numeratore stanno in ragione inversa (o reciproca) del rispettivi loro denominatori.

Avvertendo che alla proporzione $ab:cd::ac:bd$ si può anche scrivere $a:b::c:d$, perchè ne deriva $ab:cd::ac:bd$, poichè ne deriva $ab:cd::ac:bd$, poichè ne deriva $ab:cd::ac:bd$.

Dall'ipotesi, si segue vera la seguente proposizione.

VI. Due quantità sono proporzionali alle somme ed alle differenze, che si ottengono aggiungendo loro o da esse sottraendo due quantità proporzionali.

Moltiplicando e dividendo l'una per l'altra i termini analogi di due proporzioni

$a:ar::b:br$ e $a':ar':b':br'$, ottenesi

$$aa':ar'r':bb':br'r'; \frac{a}{a'}:\frac{r}{r'}::\frac{b}{b'}:\frac{r}{r'}$$

giacchè il rapporto della a è ar' , della a' è $\frac{a}{r'}$.

Si verifica pertanto

VII. Che i prodotti ed i quozienti de' termini analogi di due proporzioni geometriche si considerano an' altri.

Dato un qualunque numero di rapporti omogenei

$a:ar::b:br::c:cr::d:dr$ ec.

è $aa':(a+b+c+d)ec. ar+br+cr+dr ec.$

ovvia $a:ar::b:br$, dove $A=a+b+c+d ec.$

vale a dire

§ 64. Diciamo che dati tre elementi sempre si possono determinare gli altri due, e per darne una prova generale possiamo a mostrarci che per mezzo di due equazioni di 1.^a grado, entrambe affette da due incognite x, y , sempre può apparsi il valore di ciascuna.

Abbiamo $ax+by=c$, $Ax+By=C$.

Dalla 1.^a $x=\frac{c-by}{a}$; dalla 2.^a $x=\frac{C-By}{A}$; ma sono:

dunque $\frac{c-by}{a}=\frac{C-By}{A}$ e moltiplicando per aA ,

$A(c-by)=a(C-By)$, o sia $cAy-Abym=aC-Aby$, o c ,

cioè $(aA-Ab)y=aC-Ac$; quindi

$y=\frac{aC-Ac}{aA-Ab}$ ed $x=\frac{c}{a}-\frac{1}{a}\cdot\frac{aC-Ac}{aA-Ab}=\frac{c}{a}-\frac{1}{A}\cdot\frac{aC-Ac}{aA-Ab}$.

I quanti a cui può soddisfarsi per mezzo delle equazioni (5) sono 20, numero eguale a quello delle combinazioni ternarie di cinque elementi, $=\frac{5\cdot4\cdot3}{1\cdot2\cdot1}$ (=60), moltiplicato per 2, poichè ciascuna combinazione lascia due elementi a trovarsi.

Soggiungiamo qualche esempio tra i meno facili, onde agevolare l'uso dell'equazioni (5) e promuovere nel tempo stesso l'istruzione analitica, riservando le combinazioni che somministrano, all'esercizio scolastico ed alla diligenza de' giovani.

Esemp. 1.^o È data la terza a, b, c e vuole d . La 1.^a delle (5) mi darebbe d se conoscessi c ; a tal effetto ricorro alla 2.^a e moltiplicandola per $\frac{1}{a}$ la riduco a $\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=\frac{d}{a}$ onde $x=\frac{a}{b}-\frac{c}{b}$; dunque

$$d\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)=\left(\frac{b}{a}-\frac{c}{a}\right)\frac{1}{b-1}, \text{ cioè } d=\frac{b(a-c)}{a(b-a)}.$$

Esemp. 2.^o Trovare x per mezzo di a, d, c . L'elemento ignoto che mi imbarazza essendo a

ne ricavo l'espressione della x^2 ed ho $ax = \frac{a^2}{a+d}$; questa la pongo nella $1.^a$ ed ottengo

$$x = a + \left(\frac{a^2}{a+d} - a \right) d, \text{ cioè}$$

$$x(a+d) = a(a+d) + \left(\frac{a^2}{a+d} - a \right) d,$$

che, tolto ad dai due membri, diviso

$$x^2 + dx = a^2 + \left(\frac{a^2}{a+d} - a \right) d,$$

equazione che per avere a, d, x numeri interi, si riduce alla nota forma $x^2 + px = q(2a)$, e risolta da $ax = d(-d \pm \sqrt{d^2 + 4(a^2 - ad + ad) + d^2})$

È facile il vedere che le formule per ciascun elemento, qualunque si contemplano tutti i casi, sono quattro, perchè $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}(-1)$ sono le combinazioni ternarie tra i quattro elementi che restano.

Quando si trova $ax = b + \frac{1}{q}$ ciò vuol dire che per soddisfare al problema si dee prendere un numero intero k di termini, più la parte $\frac{1}{q}$ del termine $(b+a) \cdot \frac{1}{q}$.

§. 66. Per trovare fra due dati numeri α, β ($\alpha > \beta$), un certo numero m di medj proporzionali aritmetiche, altre non si desidera che ristaurare la differenza decisa ai successivi termini della progressione richiesta; e perchè i termini di questa debbono esser per ipotesi $m+1$, basta la semplice costruzione di a per α , di β per β e di $m+1$ per n in $d = \frac{\beta - \alpha}{m+1}$ (espressione data dalla $1.^a$

dell'equazioni (5)] per avere $d = \frac{\beta - \alpha}{m+1}$, e quindi

Se

$$a, a + \frac{\beta - \alpha}{m+1}, a + \frac{2(\beta - \alpha)}{m+1}, \dots, a + \frac{m(\beta - \alpha)}{m+1}, \\ a + \frac{(m+1)(\beta - \alpha)}{m+1} (= \beta)$$

progradiamo soddisfacente.

Essendo per es.° $a = 2, \beta = 12, m = 4$, risulta $\frac{12}{5} = 2 + \frac{4}{5}$

e $a, 2, 5\frac{1}{5}, 6\frac{2}{5}, 7\frac{3}{5}, 8\frac{4}{5}, 9\frac{1}{5} (= 12)$.

§. 62. Verificate nelle progressioni geometriche la proporzione

$$ar + ar^2 + ar^3 + \dots + ar^{r-1} = ar + ar^2 + ar^3 + \dots + ar^{r-1}; \quad (r-1)$$

si può scrivere $a = ar_0 = 1$; (*) ossia $a = ar(r-r)$,

d'onde $r_0 = r$, vale a dire $(r-1)ar = r_0 - a$; per conseguenza $ar = \frac{r_0 - a}{r-1}$, formula, la 1.ª delle

quali s'integra che la somma equivale alla differenza positiva fra l'($r+1$)-esima termine ed il 1.º, divisa per $r-1$.

$$\text{L'equazione } \left\{ ar + ar^2 + ar^3 + \dots + ar^{r-1} \right\} = \dots \quad (4)$$

non ha' opportuno per risolvere il problema analogo a quello del §. 61. Si costruisce soltanto i tre seguenti casi: che i dati sieno a, r, r ; a, r, r ; a, r, r ; nel 1.º venghì a , nel 2.º r , nel 3.º r ; così in cui l'equazione finale non avendo di alcun uso fa d'uopo supplirvi con un idromo artificiale (*).

Conoscendo a, r, r , la 1.ª delle (4) dà subito $ar = \frac{r_0 - a}{r-1}$

Si ha a dalla 1.ª per a, r, r , deducendo

$$a = \frac{r_0 - a}{r-1} \cdot r, \text{ d'onde } ar = \frac{r_0 - a}{r-1} + 1.$$

Si cerchi x per a, r, r , indi per a, r, r .

(*) Veggasi — in del. Calc. T. I. §. 109.

§ 67. Le sostituzioni del §. 65. in $x = ar^{m-1}$ danno $r = \sqrt[m-1]{\frac{\beta}{a}}$ e mediante questo valore s'introduce un numero m di med. geometrici fra a e β , cioè:

$$a, a\sqrt[m-1]{\frac{\beta}{a}}, a\left(\sqrt[m-1]{\frac{\beta}{a}}\right)^2, \dots, a\left(\sqrt[m-1]{\frac{\beta}{a}}\right)^{m-1}, \beta$$

§ 68. Una progressione geometrica dicesi divergente se i suoi termini vanno crescendo come in esemplifica ec.; convergente quando mostrano invece diminuzione:

tal è $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \dots$

Quanto è inutile supporre le prime potestà all'infinito, perchè tali risultano a, r, r^2 e la formola (3) nulla insegna per rapporto ad a ed r , altrettanto in nulla non giova riguardare la seconda come costante al di là d'ogni limite assegnabile: in queste si ha ∞ ed ∞ ed ∞ , ma resta lungo ad esprimere con una forma semplicissima uno degli elementi a, r, r^2 , per gli altri due che debbon' esser noti: diciamo per gli altri due, perchè a, r dipendendo l'uno dall'altro, non costituiremo due distinti elementi e non debbono suppori dati insieme.

Si può anche prescindere da a ed r , che richiedono la cognizione di r , unico elemento che s'agglia essere ignoto ed indeterminato. Or questo si ha subito dalla $a = \frac{r^m - 1}{r - 1}$ che si riduce a $\frac{r^m}{r - 1} = \frac{1}{\frac{1}{r} - 1}$.

Volendo per es. sommare $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16}$ ec. farei

con $r = \frac{1}{2}$ e si ottiene $\frac{1}{\frac{1}{2} - 1} = 2 - \frac{1}{2}$ ecc. Ecco una classe di serie che tutte crescono sommabili con la stessa facilità.

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} \dots + \frac{1}{2^n} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$$

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} \dots + \frac{1}{3^n} = \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{3}{2}$$

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} \dots + \frac{1}{4^n} = \frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{4}{3}$$

$$1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{5^3} \dots + \frac{1}{5^n} = \frac{1}{1-\frac{1}{5}} = \frac{5}{4}$$

$$\dots \dots \dots$$

$$1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} \dots + \frac{1}{x^n} = \frac{1}{1-\frac{1}{x}} = \frac{x}{x-1}.$$

La formula $\frac{x}{x-1}$ dà propriamente il limite a cui la somma indefinitamente si accosta a misura che la progressione si concepisce infinita.

§. 59. Come le progressioni convergenti fanno concepire l'idea dell'infinitesimo, così le divergenti presentano quella dell'infinito. È chiaro infatti che

$$\{a+na(n-1)d\}=a+(n-1)d \text{ è } \infty,$$

e che tal è pure $\{ar^{n-1}\}=ar^{n-1}$ perchè si ha $r>1$. Lo stesso si verifica per rapporto ad $a+na+na^2$, somma della progressione parallela $a=a+a, \dots$ protratta oltre ogni limite.

Dalla analisi dell'infinito e dell'infinitesimo risulta.

1. Che ∞ non è una ed anzi è una.

Infatti l'infinito è una quantità che ha ricevuto tutti i possibili gradi di aumento, e contraddice che possa nuovamente aumentarsi con una quantità finita; d'altronde se $\infty+\infty=\infty$, anche $\infty-\infty=\infty$. Così, se si potesse accostarsi per mezzo di un infinitesimo, la quantità $\frac{1}{2}$ aumenterebbe ulteriormente dimostrandosi. È poi manifesto che dall'equazione $\infty+\frac{1}{2}$ non deriva $\infty+\frac{1}{2}$.

II. Che i rapporti $a : m$, $a : \frac{1}{m}$ successivamente
sopraggiungano le rispettive proposizioni

$$a : m > m^2 > m^3, \dots, m^n; \text{ ed } \frac{1}{a} < \frac{1}{m^2} < \frac{1}{m^3}, \dots, \frac{1}{m^n}$$

vale a dire che la nozione dell'infinito include
quella dell'infinito di n^{o} ordine, ossia d' m^2 ,
infinitamente $> m$, e così via, e lo stesso di-
casi dell'infinitesimo.

III. $\frac{m}{j}$, essendo j numero finito > 1 , è inter-
medio fra qualunque grandissimo numero a ed
 m , perchè da $\frac{m}{j} = a$ deriva $m = aj$, prodotto di
due numeri finiti che non può essere infinito; e
dall'ipotesi $\frac{m}{j} = m$ nasce anche, cioè l'equa-
zione avendo $j = 1$.

IV. Se $a = 1 + \frac{1}{n}$, la potenza a^m dà

$$1 + m \cdot \frac{1}{n} + \frac{m \cdot m-1}{2} \left(\frac{1}{n} \right)^2 + \frac{m \cdot m-1 \cdot m-2}{6} \left(\frac{1}{n} \right)^3 + m.$$

$$m \cdot \frac{1}{n} + \frac{m \cdot m-1}{2} \left(\frac{1}{n} \right)^2 + \frac{m \cdot m-1}{6} \left(\frac{1}{n} \right)^3 + m.$$

ed anche supponendo j una piccolissima fran-
sione $\frac{1}{n}$, si ha $\frac{m \cdot m-1}{2} > m$, $\frac{m \cdot m-1}{6} > m^2$, ec. (a.^o proc.);
dunque a^m , se $a > 1$, esprime l'infinito di un or-
dine superiore.

V. Il prodotto de' m ed j eguale a quello degli
entrambi dimostra vera la proposizione

$$\frac{1}{a} < \frac{1}{a} \cdot j < 1 < a^{m-1}$$

qualunque sieno a ed m , e perciò anche

$$\frac{1}{a} < \frac{1}{a} \cdot j < 1 < a^m. \text{ Ma se } a > 1 \text{ è (a.^o proc.) } a^m > m,$$

e si ha (60 la fine) essere $1 < m < a < a$

Daque $\frac{1}{x} : \frac{1}{2} :: 0 : a$, cioè $\frac{1}{x} = \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot a$.

Si può adesso rintracciare a priori l'origine dell'equazione $x^n = a$, che nel §. 10 presentasi con industriale argomento, atto a convincere non a persuadere.

Ritornando i valori ottenuti nel principio del §. 15., valori di cui possono formarsi infiniti esempi diversi, apparisce che il valore di $\sqrt[n]{a}$, essendo $a > 0$, differisce se un poco, e che indistintamente tutti accostando all'unità.

Dico che il limite di $\sqrt[n]{a}$, cioè il valore di $\sqrt[n]{a} (n \rightarrow \infty)$ non può essere $>$ né < 1 .

Infatti dall'equazione $\sqrt[n]{a} = 1 + t$ deriva $a = (1+t)^n > a$ (n.° IV.) e quest'altra

$\sqrt[n]{a} = \frac{1}{1+t}$ produce $a = \frac{1}{(1+t)^n}$ cioè $a < 1$. Ed an-

co spedita ottiene la prez. conclusione se

$a = \frac{1}{1+t}$, poiché dall'equa $\sqrt[n]{1+t} = a$ risulta

$$\sqrt[n]{a} = \frac{\sqrt[n]{1}}{\sqrt[n]{1+t}} = 1 + m. \quad (*)$$

(*) La medesima analisi dell'infinito e dell'infinitesimo come qualcosa realmente in dissimile rispetto, ed è tanto più esatta che è generale in quanto per sempre fornisce il calcolo degli elementi che ne dipendono. Pare che in matematica se possono parlar d'infinitesimo, e che ogni cosa possa la rete loro produrre. Col valore gli stesso e i medesimi germi, ma i primi sempre di natura finiti e un particolare, i secondi, per nome di limiti, sono un'idea diversa quanto in qualche elemento, che la semplice e la diversa ragione per di comparazioni proprii, ed l'algebra è anche usata da molti matematici.

§ 79. Una delle più belle applicazioni delle proporzioni geometriche è la regola di *false assunzione*, tanto utile nell'Astronomia ed in altre parti della matematica mista.

È propria della *false position* semplice assumere un valore ipotetico dell'incognita in rapporto ad un problema di 1.^o grado, per dedurre il vero, mediante la proporzione fra i valori vero e falso ed i rispettivi risultamenti. Infatti qualunque sia la confusione che costituisce il problema, la sua espressione si può ridurre alla forma $ax = b$, e rendere la sostituzione del valor vero x' per x fa coincidere il 1.^o membro col risultamento vero b , dalla sostituzione del valor falso x'' deducesi il risultamento falso mb . Ma $x' : x'' :: b : mb$, ed il 2.^o termine di questa proporzione è in arbitrio, il 3.^o si conosce, il 4.^o si può apporre. Dunque per esso si determina x' , e perciò si risolve ogni problema di 1.^o grado ed una sola incognita.

Probl. Quattro cannelle simultaneamente versano acqua in una vasca, e si sa che rispettivamente la riempirebbero in 2, 3, 5, 6 ore. In quanto tempo la vasca sarebbe riempita dal simultaneo getto di tutte le cannelle? *Soluz.^{ne}*. Supponendo il tempo = 1^{ora} la 1.^a cannella riempirebbe la metà della vasca, la 2.^a di $\frac{1}{3}$, la 3.^a di $\frac{1}{5}$, l'ultima di $\frac{1}{6}$, e si avrebbe

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} \text{ ossia } \frac{7}{6} \text{ della vasca.}$$

Dunque $\frac{7}{6} : x :: 1 : 1$ ora $x = \frac{6}{7}$ ore = 54'.

Le eq. $\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x + \frac{1}{5}x + \frac{1}{6}x = 1$ dà subito $x = \frac{6}{7}$ ore = 54' (*)

(*) Vedei quindi dello stesso problema trattato negli espressioni per le equazioni del *Calcolo* in un *Calcolo* *Fisico*.

§. 71. Se il probl. dipende da due incognite x, y , più una scelta la proporzione fra i valori ipotetici d' x ed y risultamenti rispettivi. Per trovare un compenso di rappresentative l'equazioni del probl. con la formula

$$\{ax+by=d, Ax+By=D\} \dots (III)$$

S'indichi il vero valore d' x, y per x', y' ; i due rispettivi valori ipotetici d' x, y siano

$x_1, x_2; y_1, y_2; D_1, D_2$, i falsi risultamenti che si ottengono eliminando y , e poi sostituendo x_1, x_2 per x in $Ax+By=D$.

La 1.^a dell'eq. (II) dà $y=\frac{d-ax}{b}$; la 2.^a, fatto $x=x_1, =x_2$, dà come rispettivamente

$$\frac{Bd}{b} + \left(A - \frac{aB}{b}\right)x_1 = D_1, \quad \frac{Bd}{b} + \left(A - \frac{aB}{b}\right)x_2 = D_2$$

$$\text{e posto } D - \frac{Bd}{b} = H, \quad \frac{aB}{b} - A = K \quad \text{si ha}$$

$$H + Kx_1 = D - D_1, \quad H + Kx_2 = D - D_2,$$

dove i secondi membri sono gli errori provenienti dalle ipotesi 1.^a e 2.^a. Avvertasi che la differenza fra il valor vero x' ed i valori ipotetici x_1, x_2 , stanno in proporzione con gli errori dei risultamenti, cioè che risulta

$$x' - x_1 : x' - x_2 :: H + Kx_1 : H + Kx_2;$$

infatti se deriva $H(x_2 - x_1) = Kx'(x_1 - x_2)$,

$$\text{d'onde } x' = \frac{H}{K} = \left(\frac{Bd}{b} - D\right) \left(\frac{aB}{b} - A\right) = \frac{dB - bD}{aB - bA}$$

espressione identica con quella che risulta dalla eliminazione d' y fra l'eq. (III). Sia per comodo

Errori $D-D_1(-H+Kx_1)=m_1$

Errori $D-D_2(-H+Kx_2)=m_2$

e la proporzione $x'-x_1:m_1=x_2-x_2:m_2$ ci dà

$$x_2(x'-x_1)=x_1(x'-x_2) \text{ cioè } x'=\frac{x_1x_2+x_2^2}{x_2-x_1}$$

formola che comprende una facile regola pratica per tutti i problemi di 1.^o grado a due incognite.

Probl. Due giocatori insieme ed il più breve accomunano 10 soldi contro otto ad ogni partita. Fatto *il* *decimo* partita l'altro gli paga 20 soldi. Quante partite ha egli vinte? **Soluz.**—Supponendo il n.^o partite $x=6(-x_1)$ risulta $y=4$, i giocatori restano pari e si ha $x_1=-10$. Fatto $x=6(-x_2)$ è $y_2=10$ ed $x_2=-20$. Dunque

$$\frac{10 \cdot 4 + 10 \cdot 1}{10} = \frac{50}{10} = 5 \text{ ed } y=5.$$

Si ritrova lo stesso del sistema

$$x+y=10, \quad 8x-10y=0. \quad (7)$$

CAPITOLO IX.

Delle Serie.

§. 71. **Possibile** supponiamo che si succedano con una determinata legge continue formano una serie (**).

La legge può essere scelta ad arbitrio e costituita dalle sviluppamento di una funzione frazionaria o irrazionale (***) Si ha per esempio:

(*) È ad esprimersi questa quella che altri ha potuto fare della doppia idea presente all'op. op. op.

(**) I numeri, le velocità, le forze ed in qualsiasi cosa altre cose, i quali si succedono in una serie di numeri: ad esempio il numero delle vibrazioni in una stessa unità di tempo, nelle velocità di scorrimento delle ruote in una stessa unità di tempo, e così via.

(***) Il *Calcolo delle Differenze* e l'*Algebra differenziale* offrono due modi della serie. In generale, la loro sviluppo non è finito, se non in alcuni casi, e si può dar molti esempi.

$$(a+x)^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} \frac{x}{a^{\frac{1}{2}}} + \frac{1}{8} \frac{x^2}{a^{\frac{3}{2}}} + \dots$$

$$\frac{1+x}{1-3x+2x^2} = 1 + 4x + 8x^2 + 16x^3 + 32x^4 + \dots$$

La 1.^a serie si compone direttamente con la seguente legge.

Prendi per primi termini 1, $3x$, si stabilisce di formare il 3.^o mediante la somma dell'antecedente moltiplicato per $3x$ e dell'antecedente moltiplicato per $2x^2$; si applica la stessa legge alla formazione del 4.^o e così via.

§. 75. Lo sviluppo di un quoziente letterale, per es.^o di $\frac{a^2}{x^2}$, sino al termine

$(a+x)^{2n+1}$, nel presente caso

$$\frac{a^2}{x^2} = 1 + \frac{a}{x} + \frac{a^2}{x^2} + \dots + \frac{a^n}{x^n},$$

per esser completa esige la giunta del quoziente, che si ha dividendo il residuo $\frac{a^{n+1}}{x^n}$, contenente al termine $(a+x)^{2n+1}$, pel solito dividendo $a+x$, esige cioè il termine complementario $\frac{a^{n+1}}{x^{n+1}}$. Si può prevederla nella sola ipotesi $x^2(a-x)$

che la serie dedotta sia convergente ad infinito.

Preso $a=x$, come la conseguenza richiede, il termine complementario all'infinito diviene (69. a.^o V.)

$$\frac{a^{n+1}}{x^{n+1}(a-x)} \left(\frac{a}{x}\right)^n = \frac{a}{a-x} = \frac{x}{x-x} = \infty.$$

Quando la serie diverge risulta $A\left(\frac{a}{x}\right)^{2n} = \infty$, e

perchè il numero $\frac{x}{x-1} = \frac{1}{1-x}$ è finito, il termine complementario cresce indefinitamente con n e lo porta via

$$\frac{x}{x-1} = \left\{ 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1^2} + \dots + \frac{x^n}{1^n} \right\} + \frac{x^{n+1}}{1^{n+1} - 1}.$$

Questa formula, se fissi $x=2$, 3 ecc. ed $x=1$ riproduce le serie del § 68: al contrario se si suppone $x=1$, s'ha sempre la

$$-1 = \left\{ 1 + 2^n + 2^{2n} + \dots + 2^{nn} \right\} - 2^{n+1}$$

e la serie dentro le square non è -1 , ma bensì

$$\frac{2^{n+1}}{2^{n+1} - 1}.$$

Infatti (56) $\frac{x \left[\frac{x^{n+1}-1}{x-1} \right]}{x^{n+1}-1} = \frac{x^2-1}{x-1} = x^{n+1} - 1.$

Nella stessa guisa facendo $x=1$ nell'equazione

$$\frac{1-x^2}{1+x^2+x^4} = \left\{ 1-3x^2+5x^4-7x^6+\dots+x(1-x)x^{2n-1} \right\} \\ \frac{x(1-x)x^{2n-1}}{1+x^2+x^4}$$

si ottiene $0=1-3+5-7+9+\dots+xn \left(\frac{x^2}{4} \right).$

È chiaro che $1-3+5-7$ ecc. all'infinito vanisce, e quando con un metodo legittimo, che dee dipendere dalla frazione generatrice, si trova $1-3+5$ ecc. ∞ , ciò significa che la frazione suddetta, nell'ipotesi d' $x=1$ vanisce, cioè che zero è la somma della serie infinita $1-3+5$ ecc. presa insieme col residuo. I valori -1 , 0 , spettanti alle rispettive serie

$$1, 2, 2^2 \text{ ecc.}, 1-3+5 \text{ ecc.}$$

li diciamo somme complementarie, perchè richiedono come loro complemento il residuo, e così li distinguiamo da' limiti (56) con cui non hanno relazione.

Per appurare direttamente la verità della serie infinta $1-3+5$ ecc. sta f' quella degli n primi termini d'ordine dispari, f'' degli $n-1$ primi termini d'ordine pari, e deducendo (53)

$$f' \left[- (2n + (n-1)f) \frac{1}{2} \right] = (1 + n(n-1))n = n^3 - n$$

$$f'' \left[- (2n + (n-1)f) \frac{1}{2} \right] = (3 + n(n-1))(n-1) = n^3 - 3n + 2,$$

si avrà $f' - f'' = (n-2) = 2n-4$.

Si trova $2n-4$ prendendo n termini di f' .

§ 74. Un elegante metodo generale per trovare la serie una data funzione, si è quello del coefficienti indeterminati, metodo che adopero anche per ottenere gli sviluppati (5), (x) nei §§ 53 e 56; esso è anche uguale ad uno assolutamente identico. Talvolta, però giova ed in qualche caso bisogna, nell'anticipata idea della legge moderatrice, supporre per esempio che l'espressione di $V(a^2-x^2)$ non può contenere le potenze dispari di x , perchè x^2 sta per a (§4), si pone $V(a^2-x^2) = A + Bx^2 + Cx^4 + \text{ec.}$

Da questa equazione localizzata al quadrato, trasportando a^2-x^2 nel 2.° membro, si ha

$$0 = \begin{vmatrix} A^2 + aAB & x^2 + B^2 & x^4 + aAC \\ -a^2 + & -1 & -2aC \\ & & +2BC \end{vmatrix} \text{ ec.}$$

quindi come (55, 56)

$$A^2 - x^2 = aAB + 1 = 0, B^2 + aAC = 0, aAD + 2aBC = 0, \text{ ec.}$$

$$\text{e può } A = a, B \left(= -\frac{1}{aA} \right) = -\frac{1}{a^2}, C \left(= -\frac{B^2}{aA} \right) = -\frac{1}{6a^3}, \text{ ec.}$$

§ 75. Essendo y una data funzione di x , non sempre basta, avere $y = Ax + Bx^2 + Cx^3$ ec. ma si suppone $x = ay + by^2 + cy^3$ ec. cioè la serie inversa. A tal effetto si sviluppa l'espressione

$$y = a(y + by^2 + cy^3 + \text{ec.}) + B(y + by^2 + \text{ec.})^2 + C(y + by^2 + \text{ec.})^3 \text{ ec.}$$

e raccolti per ordine in un solo membro i ter.

non simili a la separatamente uguale a zero ciascuno dei coefficienti di y^3 , y^2 , y ed. il che dà tre equazioni di 1.^a grado, questi sono α , β , γ ed. Ecco l'operazione di cui si tratta:

$$y = A\alpha y + A\beta \left| \begin{array}{c} y^3 = A\gamma \\ + 3\alpha\beta \\ + Ca^2 \end{array} \right| y^2 = \left| \begin{array}{c} A\delta \\ + 3\alpha\gamma \\ + 3Ca\beta \\ + D\alpha^2 \end{array} \right| y + \text{ed. simile}$$

$$\alpha = (A\alpha - 1)y + (A\beta - 3\alpha^2)y^2 + (A\gamma + 3\alpha\beta\gamma + Ca^2)y^3 \text{ ed.}$$

Quindi

$$A\alpha - 1 = 0, \quad A\beta - 3\alpha^2 = 0, \quad A\gamma + 3\alpha\beta\gamma + Ca^2 = 0, \text{ ed.}$$

Dalla 1.^a $\alpha = \frac{1}{A}$; la 2.^a dà come $A\beta + \frac{3}{A^2} = 0$ e

da $\beta = -\frac{3}{A^2}$; posto il valore d' α e di β nelle

3.^a si trova $\gamma = \frac{3A^2 - 6C}{A^2}$, e proseguendo si trova

$$A = (5ABC - A^2D - 5B^2) : A^2;$$

$$\text{ed.} (4\beta^2 - 3\alpha A\delta^2 C + 6A^2BD + 5A^2C^2 - A^3E) : A^3$$

ed. ed.

Es.^o La serie proposta sia

$$y = x + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3.2^2}{2.3.4.5} + \frac{x^4.2^3.3^2}{3.4.5.6.7} + \frac{x^5.2^4.3^3.4^2}{4.5.6.7.8.9.10} \\ \dots + \frac{x^n.2^{n-1}.3^{n-2} \dots (n-1)^{n-1}}{n.2.3 \dots (n+1)}$$

Per comodo la riduco ad

$$y = x + \frac{x^2}{1.2} + \frac{2x^3}{2.3.4} + \frac{3.2x^4}{3.4.5.6} \text{ ed.}$$

e posto $A=1$, $B=0$, $C=\frac{2}{3}$, $D=0$, $E=\frac{5}{4.5}$ ed.

trovo $\alpha=1$, $\beta=0$, $\gamma=\frac{2}{3}$, $\delta=0$, ed. $\frac{5}{2.3.4.5}$ ed.

dove $x = y - \frac{y^2}{2.1} + \frac{y^3}{3.2.1} - \frac{y^4}{4.3.2.1} + \dots$

Quasi ecc. ci sarà utile.

Quando la serie di cui vuole si rappresentare è $y - 2xy + 3y^2$ ecc. si fa $y - 2xy + 3y^2$ ecc.

§. 76. Prima di lasciare l'argomento del presente Capitolo, conviene che si occupino alquanto nell'esame di tre speciali classi di serie, e sono le algebriche, le combinatorie e le ricorrenti.

Una serie dicasi algebrica quando con prendendo la differenza de' suoi termini successivi, o di quelle delle differenze prime, poi della differenza seconda ecc. si giunga a trovare le differenze di un certo ordine tutte uguali. Le serie di 1.^o ordine sono progressioni aritmetiche: Tra quelle di 2.^o ordine meritano distinta menzione i numeri poligoni, di cui occupiamo il presente, unitamente alle rispettive progressioni geometriche, che si producono mediante la somma de' successivi loro termini.

Progr. gener. ^a	Num. ^o polig. corrisp. ^o	
$1, 3, 5, 7, 9, \dots, n$	$1, 3, 5, 7, 9, \dots, \frac{n^2}{2}(n+1)$	} trigoni
$1, 3, 5, 7, 9, \dots, 10-1$	$1, 3, 5, 7, 9, \dots, n^2$	
$1, 4, 7, 10, 13, \dots, 3n-2$	$1, 3, 5, 7, 9, \dots, \frac{n^2}{2}(3n-1)$	} pentag.
$1, 5, 9, 13, 17, \dots, 4n-3$	$1, 3, 5, 7, 9, \dots, n(2n-1)$	
.....		

Sono di un ordine successivamente crescente, a partire dal 1.^o, le serie de' numeri figurati, in cui che cominciano con quella de' trigoni, e si formano mediante la somma de' successivi termini della serie antecedente.

candeli rispettivamente per una determinata quantità, ch'è sempre la stessa per un termine di un dato ordine innanzi a quello che lo segue. E per es.^a

$$a - ax + ax^2 - ax^3 + \dots - ax^n \quad [\text{riem.}^a \text{ di } 1.^a \text{ ord.}]$$

$$1 - 1 + 1x - 12x^2 + 161x^3 - \dots \quad [\text{riem.}^a \text{ di } 2.^a \text{ ord.}]$$

perchè ogni termine della 1.^a equivale al precedente moltiplicato per $-a$; ciascuno della 2.^a al composto di due parti, a tenore di ciò che si vide (70). I moltiplicatori $12, 161$, ne costituiscono la scala di relazione.

Vale a dire ed interessanti le ricerche da farsi su quest'argomento, ma noi siamo costretti a tralasciarle. Veggasi So. del Calc. §. 160 - 63. Terminiamo con osservare, che il metodo d'interpolazione insegna ad inserire un certo numero di archi fra successivi termini di una serie y_0, y_1, y_2 ec. di cui non abbia il termine generale, con la condizione che la nuova serie sia della natura stessa della proposta.

Quando è dato un nuovo termine y_n a ruolo finchè n che gli compete nel sistema

$$y_0, y_1, y_2, \dots, y_n, \dots, y$$

$$y_0, y_1, y_2, \dots, y_n, \dots, y$$

si richiede un metodo particolare che dicasi metodo nuovo d'interpolazione.

Si l'uno che l'altro de' due prec. problemi generali sarà da noi ampiamente risoluto nel tomo X. della *Scienza del Calcolo*.

Frazioni continue.

§. 79. Talvolta nel risaltamento fra due compari-
rioni qualche frazione numerica irriducibile, i
cui termini sono composti di molte cifre, e la
natura del problema lascia desiderare altre fra-
zioni più semplici il cui valore sia prossimo al
vero, e ciò si ottiene con un brevissimo artificio
consistente nella trasformazione di $\frac{a}{b}$ in $1 + \frac{p}{a}$.
La propria frazione essendo $\frac{m_1 n_1}{m_2 n_2}$ deducasi

$$\frac{m_1 n_1}{m_2 n_2} = 1 + \frac{1 + r}{m_2 n_2}$$

$$\frac{m_1 n_1}{m_2 n_2} = 1 : \frac{m_2 n_2}{1 + r} = 1 : \left(2 + \frac{m_2}{1 + r} \right)$$

$$\frac{m_1}{1 + r} = 1 : \frac{m_2 n_2}{n_2} = 1 : \left(3n + \frac{1}{n_2} \right)$$

$$\frac{1}{n_2} = 1 : \frac{3n}{1} = 1 : \left(7 + \frac{1}{4} \right)$$

dalchè

$$\frac{m_1 n_1}{m_2 n_2} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{3n + \frac{1}{7 + \frac{1}{4}}}} = 1 + \frac{1}{2n + \frac{1}{3} + \frac{1}{7n + \frac{1}{4}}} \quad \text{cioè } (2, 3n, 7, 4) \text{ con } 1$$

(*) Miksa Brontar diede la prima idea di questa serie di fra-
zioni: in una sua lettera diretta a Miksa, in cui spiega il
rapporto del circolo al quadrato del diametro, sotto la forma

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \dots$$

Spiega al Miksa la stessa l'aver scoperto le principali
sue proprietà.

Si cerchi lo sviluppo di $\frac{x+1}{x^2}$ e si trovi

$$\frac{x+1}{x^2} = 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^4} + \frac{1}{x^5} + \frac{1}{x^6} + \frac{1}{x^7} + \frac{1}{x^8} + \frac{1}{x^9} + \frac{1}{x^{10}} + \dots$$

(1) $x = 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$

Le parti $1, 1 + \frac{1}{x}, 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}, \dots$ sono frazioni

convergenti, e costituiscono altrettante approssi-
mazioni più semplici ed approssimative della frazione
proposta. Esse hanno varie prerogative assai di-
stinte, una delle quali è:

Che, qualora il 1.^o termine non sia intero, il che
succede se si opera su di una frazione propria,
un numero dispari di frazioni dà un valor' suc-
cedente, le dà mancherà un numero pari; vice-
versa se intero è il 1.^o termine.

Infatti abbiamo nel 2.^o esempio

$$1 < 1 + \frac{1}{2} < 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} < 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} < 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16}$$

perchè

$$\frac{1}{2} > \frac{1}{4} > \frac{1}{8} > \frac{1}{16} \dots \quad 1 + \frac{1}{2} < 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} < 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} < 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16}$$

perchè $2 + \frac{1}{2} > 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$, e così in seguito.

E quest' argomentazione può far la base di una
prova generale.

§ 86. Prima d' inoltrarci nella presente dottri-
na, osserviamo 1.^o che siccome un numero irra-

zionale non può essere uguale ad un numero finito, ma frazionario, lo sviluppo del medesimo necessariamente si estende oltre ogni limite, dovendo per es. $\sqrt{2} = 1,41421356237\ldots = \frac{141421356237}{100000000000}$, si trova $\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{24} + \frac{1}{64} + \frac{1}{128} + \frac{1}{256} + \frac{1}{512} + \frac{1}{1024} + \frac{1}{2048} + \frac{1}{4096} + \frac{1}{8192} + \frac{1}{16384} + \frac{1}{32768} + \frac{1}{65536} + \frac{1}{131072} + \frac{1}{262144} + \frac{1}{524288} + \frac{1}{1048576} + \frac{1}{2097152} + \frac{1}{4194304} + \frac{1}{8388608} + \frac{1}{16777216} + \frac{1}{33554432} + \frac{1}{67108864} + \frac{1}{134217728} + \frac{1}{268435456} + \frac{1}{536870912} + \frac{1}{1073741824} + \frac{1}{2147483648} + \frac{1}{4294967296} + \frac{1}{8589934592} + \frac{1}{17179869184} + \frac{1}{34359738368} + \frac{1}{68719476736} + \frac{1}{137438953472} + \frac{1}{274877906944} + \frac{1}{549755813888} + \frac{1}{1099511627776} + \frac{1}{2199023255552} + \frac{1}{4398046511104} + \frac{1}{8796093022208} + \frac{1}{17592186044416} + \frac{1}{35184372088832} + \frac{1}{70368744177664} + \frac{1}{140737488355328} + \frac{1}{281474976710656} + \frac{1}{562949953421312} + \frac{1}{1125899906842624} + \frac{1}{2251799813685248} + \frac{1}{4503599627370496} + \frac{1}{9007199254740992} + \frac{1}{18014398509481984} + \frac{1}{36028797018963968} + \frac{1}{72057594037927936} + \frac{1}{144115188075855872} + \frac{1}{288230376151711744} + \frac{1}{576460752303423488} + \frac{1}{1152921504606846976} + \frac{1}{2305843009213693952} + \frac{1}{4611686018427387904} + \frac{1}{9223372036854775808} + \frac{1}{18446744073709551616} + \frac{1}{36893488147419103232} + \frac{1}{73786976294838206464} + \frac{1}{147573952589676412928} + \frac{1}{295147905179352825856} + \frac{1}{590295810358705651712} + \frac{1}{1180591620717411303424} + \frac{1}{2361183241434822606848} + \frac{1}{4722366482869645213696} + \frac{1}{9444732965739290427392} + \frac{1}{18889465931478580854784} + \frac{1}{37778931862957161709568} + \frac{1}{75557863725914323419136} + \frac{1}{151115727451828646838272} + \frac{1}{302231454903657293676544} + \frac{1}{604462909807314587353088} + \frac{1}{1208925819614629174706176} + \frac{1}{2417851639229258349412352} + \frac{1}{4835703278458516698824704} + \frac{1}{9671406556917033397649408} + \frac{1}{19342813113834066795298816} + \frac{1}{38685626227668133590597632} + \frac{1}{77371252455336267181195264} + \frac{1}{154742504910672534362390528} + \frac{1}{309485009821345068724781056} + \frac{1}{618970019642690137449562112} + \frac{1}{1237940039285380274899124224} + \frac{1}{2475880078570760549798248448} + \frac{1}{4951760157141521099596496896} + \frac{1}{9903520314283042199192993792} + \frac{1}{19807040628566084398385987584} + \frac{1}{39614081257132168796771975168} + \frac{1}{79228162514264337593543950336} + \frac{1}{158456325028528675187087900672} + \frac{1}{316912650057057350374175801344} + \frac{1}{633825300114114700748351602688} + \frac{1}{1267650600228229401496703205376} + \frac{1}{2535301200456458802993406410752} + \frac{1}{5070602400912917605986812821504} + \frac{1}{10141204801825835211973625643008} + \frac{1}{20282409603651670423947251286016} + \frac{1}{40564819207303340847894502572032} + \frac{1}{81129638414606681695789005144064} + \frac{1}{162259276829213363391578010288128} + \frac{1}{324518553658426726783156020576256} + \frac{1}{649037107316853453566312041152512} + \frac{1}{1298074214633706907132624082305024} + \frac{1}{2596148429267413814265248164610048} + \frac{1}{5192296858534827628530496329220096} + \frac{1}{10384593717069655257060992658440192} + \frac{1}{20769187434139310514121985316880384} + \frac{1}{41538374868278621028243970633760768} + \frac{1}{83076749736557242056487941267521536} + \frac{1}{166153499473114484112975882535043072} + \frac{1}{332306998946228968225951765070086144} + \frac{1}{664613997892457936451903530140172288} + \frac{1}{1329227995784915872903807060280344576} + \frac{1}{2658455991569831745807614120560689152} + \frac{1}{5316911983139663491615228241121378304} + \frac{1}{10633823966279326983230456482242756608} + \frac{1}{21267647932558653966460912964485513216} + \frac{1}{42535295865117307932921825928971026432} + \frac{1}{85070591730234615865843651857942052864} + \frac{1}{170141183460469231731687303715884105728} + \frac{1}{340282366920938463463374607431768211456} + \frac{1}{680564733841876926926749214863536422912} + \frac{1}{1361129467683753853853498429727072845824} + \frac{1}{2722258935367507707706996859454145691648} + \frac{1}{5444517870735015415413993718908291383296} + \frac{1}{10889035741470030830827987437816582766592} + \frac{1}{21778071482940061661655974875633165533184} + \frac{1}{43556142965880123323311949751266331066368} + \frac{1}{87112285931760246646623899502532662132736} + \frac{1}{174224571863520493293247799005065324265472} + \frac{1}{348449143727040986586495598010130648530944} + \frac{1}{696898287454081973172991196020261297061888} + \frac{1}{1393796574908163946345982392040522594123776} + \frac{1}{2787593149816327892691964784081045188247552} + \frac{1}{5575186299632655785383929568162090376495104} + \frac{1}{11150372599265311570767859136324180752990208} + \frac{1}{22300745198530623141535718272648361505980416} + \frac{1}{44601490397061246283071436545296723011960832} + \frac{1}{89202980794122492566142873090593446023921664} + \frac{1}{178405961588244985132285746181186892047843328} + \frac{1}{356811923176489970264571492362373784095686656} + \frac{1}{713623846352979940529142984724747568191373312} + \frac{1}{1427247692705959881058285969449495136382746624} + \frac{1}{2854495385411919762116571938898990272765493248} + \frac{1}{5708990770823839524233143877797980545530986496} + \frac{1}{11417981541647679048466287755595961091061972992} + \frac{1}{22835963083295358096932575511191922182123945984} + \frac{1}{45671926166590716193865151022383844364247891968} + \frac{1}{91343852333181432387730302044767688728495783936} + \frac{1}{182687704666362864775460604089535377456991567872} + \frac{1}{365375409332725729550921208179070754913983135744} + \frac{1}{730750818665451459101842416358141509827966271488} + \frac{1}{1461501637330902918203684832716283019655932542976} + \frac{1}{2923003274661805836407369665432566039311865085952} + \frac{1}{5846006549323611672814739330865132078623730171904} + \frac{1}{11692013098647223345629478661730264157247460343808} + \frac{1}{23384026197294446691258957323460528314494920687616} + \frac{1}{46768052394588893382517914646921056628989841375232} + \frac{1}{93536104789177786765035829293842113257979682750464} + \frac{1}{187072209578355573530071658587684226515959365500928} + \frac{1}{374144419156711147060143317175368453031918731001856} + \frac{1}{748288838313422294120286634350736906063837462003712} + \frac{1}{1496577676626844588240573268701473812127674924007424} + \frac{1}{2993155353253689176481146537402947624255349848014848} + \frac{1}{5986310706507378352962293074805895248510699696029696} + \frac{1}{11972621413014756705924586149611790497021399392059392} + \frac{1}{23945242826029513411849172299223580994042798784118784} + \frac{1}{47890485652059026823698344598447161988085597568237568} + \frac{1}{95780971304118053647396689196894323976171195136475136} + \frac{1}{191561942608236107294793378393788647952342390272950272} + \frac{1}{383123885216472214589586756787577295904684780545900544} + \frac{1}{766247770432944429179173513575154591809369561091801088} + \frac{1}{1532495540865888858358347027150309183618739122183602176} + \frac{1}{3064991081731777716716694054300618367237478244367204352} + \frac{1}{6129982163463555433433388108601236734474956488734408704} + \frac{1}{12259964326927110866866776217202473468949912977468817408} + \frac{1}{24519928653854221733733552434404946937899825954937634816} + \frac{1}{49039857307708443467467104868809893875799651909875269632} + \frac{1}{98079714615416886934934209737619787751599303819750539264} + \frac{1}{196159429230833773869868419475239575503198607639501078528} + \frac{1}{392318858461667547739736838950479151006397215279002157056} + \frac{1}{784637716923335095479473677900958302012794430558004314112} + \frac{1}{1569275433846670190958947355801916604025588861116008628224} + \frac{1}{3138550867693340381917894711603833208051177722232017256448} + \frac{1}{6277101735386680763835789423207666416102355444464034512896} + \frac{1}{12554203470773361527671578846415332832204710888928069025792} + \frac{1}{25108406941546723055343157692830665664409421777856138051584} + \frac{1}{50216813883093446110686315385661331328818843555712276103168} + \frac{1}{100433627766186892221372630771322662657637687111424552206336} + \frac{1}{200867255532373784442745261542645325315275374222849104412672} + \frac{1}{401734511064747568885490523085290650630550748445698208825344} + \frac{1}{803469022129495137770981046170581301261101496891396417650688} + \frac{1}{1606938044258990275541962092341162602522202993782792835301376} + \frac{1}{3213876088517980551083924184682325205044405987565585670602752} + \frac{1}{6427752177035961102167848369364650410088811975131171341205504} + \frac{1}{12855504354071922204335696738729300820177623950262342682411008} + \frac{1}{25711008708143844408671393477458601640355247900524685364822016} + \frac{1}{51422017416287688817342786954917203280710495801049370729644032} + \frac{1}{102844034832575377634685573909834406561420991602098741459288064} + \frac{1}{205688069665150755269371147819668813122841983204197482918576128} + \frac{1}{411376139330301510538742295639337626245683966408394965837152256} + \frac{1}{822752278660603021077484591278675252491367932816789931674304512} + \frac{1}{1645504557321206042154969182557350504982735865633579863348609024} + \frac{1}{3291009114642412084309938365114701009965471731267159726697218048} + \frac{1}{6582018229284824168619876730229402019930943462534319453394436096} + \frac{1}{13164036458569648337239753460458804039861886925068638906788872192} + \frac{1}{26328072917139296674479506920917608079723773850137277813577744384} + \frac{1}{52656145834278593348959013841835216159447547700274555627155488768} + \frac{1}{105312291668557186697918027683670432318895095400549111254310977536} + \frac{1}{210624583337114373395836055367340864637790190801098222508621955072} + \frac{1}{421249166674228746791672110734681729275580381602196445017243910144} + \frac{1}{842498333348457493583344221469363458551160763204392890034487820288} + \frac{1}{1684996666696914987166688442938726917102321526408785780068975640576} + \frac{1}{3369993333393829974333376885877453834204643052817571560137951281152} + \frac{1}{6739986666787659948666753771754907668409286105635143120275902562304} + \frac{1}{13479973333575319897333507543509815336818572211270286240551805124608} + \frac{1}{26959946667150639794667015087019630673637144422540572481103610249216} + \frac{1}{53919893334301279589334030174039261347274288845081144962207220498432} + \frac{1}{107839786668602559178668060348078522694548577690162289924414440996864} + \frac{1}{215679573337205118357336120696157045389097155380324579848828881993728} + \frac{1}{431359146674410236714672241392314090778194310760649159697657763987456} + \frac{1}{862718293348820473429344482784628181556388621521298319395315527974912} + \frac{1}{1725436586697640946858688965569256363112777243042596638790631055949824} + \frac{1}{3450873173395281893717377931138512726225554486085193277581262111899648} + \frac{1}{6901746346790563787434755862277025452451108972170386555162524223799296} + \frac{1}{13803492693581127574869511724554050904902217944340773110325048447598592} + \frac{1}{27606985387162255149739023449108101809804435888681546220650096895197184} + \frac{1}{55213970774324510299478046898216203619608871777363092441300193790394368} + \frac{1}{110427941548649020598956093796432407239217743554726184882600387580788736} + \frac{1}{220855883097298041197912187592864814478435487109452369765200775161577472} + \frac{1}{441711766194596082395824375185729628956870974218904739530401550323154944} + \frac{1}{883423532389192164791648750371459257913741948437809479060803100646309888} + \frac{1}{1766847064778384329583297500742918515827483896875618958121606201292619776} + \frac{1}{3533694129556768659166595001485837031654967793751237916243212402585239552} + \frac{1}{7067388259113537318333190002971674063309935587502475832486424805170479104} + \frac{1}{14134776518227074636666380005943348126619871175004951664972849610340958208} + \frac{1}{28269553036454149273332760011886696253239742350009903329945699220681916416} + \frac{1}{56539106072908298546665520023773392506479484700019806659891398441363832832} + \frac{1}{113078212145816597093331040047546785012958969400039613319782796882727665664} + \frac{1}{226156424291633194186662080095093570025917938800079226639565593765455331328} + \frac{1}{452312848583266388373324160190187140051835877600158453279131187530910662656} + \frac{1}{904625697166532776746648320380374280103671755200316906558262375061821325312} + \frac{1}{1809251394333065553493296640760748560207343510400633813116524750123642650624} + \frac{1}{3618502788666131106986593281521497120414687020801267626233049500247285301248} + \frac{1}{7237005577332262213973186563042994240829374041602535252466099000494570602496} + \frac{1}{14474011154664524427946373126085988481658748083205070504932198000989141204992} + \frac{1}{28948022309329048855892746252171976963317496166410141009864396001978282409984} + \frac{1}{57896044618658097711785492504343953926634992332820282019728792003956564819968} + \frac{1}{115792089237316195423570985008687907853269984665640564039457584007913129639936} + \frac{1}{231584178474632390847141970017375815706539969331281128078915168015826259279872} + \frac{1}{463168356949264781694283940034751631413079938662562256157830336031652518559744} + \frac{1}{926336713898529563388567880069503262826159877325124512315660672063305037119488} + \frac{1}{1852673427797059126777135760139006525652319754650249024631321344126610074238976} + \frac{1}{37053468555941182535542715202780130513046395093004980492626426882$

$$\cos(x_1, a_1, a_2, \dots, a_n);$$

formola, che anche quando sia infinita, risulta esattamente esatta per $a(x_1, a_2, a_3, \dots, a_n)$

perchè a_n è $-a_n + \frac{1}{a_{n+1}}$ ecc.

§. 82. Sommando $a + \frac{1}{a_1}$, $a + \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2}$, ecc. per

le che si comincia dalle ultime due frazioni, si trovano le frazioni convergenti

$$\frac{a}{1}, \frac{a_1 + a}{a_1}, \frac{(a_1 + a)a_2 + a}{a_1 a_2 + a}, \frac{\{ (a_1 + a)a_2 + a \} a_3 + a}{(a_1 a_2 + a)a_3 + a}, \dots$$

ed il simmetrico loro adducendo dapprima, che qualora si rappresentino i numeratori per d_1, d_2, d_3 , ecc. i denominatori per a, a_1, a_2 , ecc. è

$$\left. \begin{aligned} d &= a \\ d_1 &= a_1 d + 1 \\ d_2 &= a_2 d_1 + d \\ d_3 &= a_3 d_2 + d_1 \\ d_4 &= a_4 d_3 + d_2 \\ &\dots \end{aligned} \right\} = 1, \quad \left. \begin{aligned} a &= 1 \\ a_1 &= a_1 \\ a_2 &= a_2 a_1 + a \\ a_3 &= a_3 a_2 + a_1 \\ a_4 &= a_4 a_3 + a_2 \\ &\dots \end{aligned} \right\} = 2$$

Espresso le frazioni convergenti col simboli

$$\frac{d}{a}, \frac{d_1}{a_1}, \frac{d_2}{a_2}, \dots$$

un facile sperimento si suggerisce essere

$$[d, a_1 - d_1, a_2 - d_2, a_3 - d_3, a_4 - d_4, a_5 - d_5, a_6 - d_6, \dots] = 2$$

I termini di ciascuna frazione sono dunque ridotti ai minimi termini, perchè se fosse

$$d = a p_1 H, \quad a = a_1 p_1 H, \quad risulterebbe $H a = -d, \quad H a_1 = \frac{d}{p_1}$$$

cioè un intero eguale ad un retto (*)

(*) Si vedeva dimostrazione della formola I, II, e qualunque derivata dall'originale, come pure del test. III, è data da test addotti nella 3a del Calc. (Tom. I. §. 188) e 189).

§. 83. Si come a, ca_1, ca_2, ca_3 ecc. le differenze

$$\frac{d_1}{a_1} = \frac{d}{a} = \frac{1}{aa_1}, \quad \frac{d_2}{a_2} = \frac{d_1}{a_1} = \frac{1}{a_1 a_2}, \text{ ecc. ecc.}$$

vanno diminuendo, e fatta l'algebra $= \frac{d_n}{a_n}$,

l'addizione di tutte le differenze dà

$$\frac{d_n}{a_n} \text{ così } \frac{d}{a} + \frac{1}{aa_1} + \frac{1}{a_1 a_2} + \frac{1}{a_2 a_3} + \frac{1}{a_3 a_4} \text{ ecc.}$$

serie convergente che dipende dai soli denominatori.

§. 84. Viessimo una serie i cui segni son' alternati si può trasformare in frazione continua, e questo processo conduce ad una singolar forma di tali frazioni, mentre dimostrata ed elegante, e sempre indirettamente l'origine di alcune notabili espressioni, fra le quali quella di *Brounner* (77).

Prendi la formula generalizzata

$$a + \frac{b}{\beta + \frac{\gamma}{\gamma}} \quad \text{vale a dire}$$

un sufficiente numero d'indeterminate, toglisi la 1.^a frazione convergente

$$\frac{a\beta + b}{\beta} \text{ della } 3.^{\circ} \quad \frac{a\beta\gamma + a\gamma + \gamma b}{\beta\gamma + \gamma};$$

questa delle §. 1.^a ecc.: la serie delle differenze, che insieme con $\frac{a}{1}$ equivale alla frazione conti-

nua, si paragoni per ordine coi termini della serie data, e discova la prima potenza in ogni termine due quantità arbitrarie β, γ ; a, γ ecc. può sempre assegnarsi alle indeterminate β, γ ecc. un tal valore, che quella delle b, c ecc. pre-

range intero come si richiede. Le serie che seguono

$$A_1 - A_2 + A_2 - A_3 + \dots = m A_n,$$

$$\frac{m}{A_1} = \frac{m}{A_2 A_3} + \frac{m}{A_1 A_2 A_3} + \dots = \frac{m}{A_1 A_2 + A_3}$$

$$\frac{1}{A_1} = \frac{1}{A_2} + \frac{1}{A_3} + \frac{1}{A_4} + \dots = \frac{1}{A_n},$$

serviranno di norma per ogni altro caso.

Per rapporto alla prima si ha

$$A_1 = \frac{b}{\beta}, A_2 = \frac{bc}{\beta(\beta\gamma + c)}, A_3 = \frac{bcd}{\beta(\beta\gamma + c)^2 + (cd)(\beta\gamma + c)}, \text{ ecc.}$$

$$\text{Quindi} \quad b = \beta A_1, \quad c = \frac{\beta\gamma A_2}{A_1 - A_2},$$

sostituendo il valore di c si trova

$$d \left[- \frac{\beta A_2 (\beta^2 + c)}{\beta(A_1 - A_2)} \right] = \frac{\gamma^2 A_2 A_3}{(A_1 - A_2)(A_2 - A_3)} \text{ e così via.}$$

Basta da farsi per β, γ ecc. un'ipotesi semplice che renda b, c ecc. interi per lo che giova supporre

$$a=0, \beta=1, \gamma=A_1-A_2, b=A_2-A_3, \text{ ecc.}; \text{ quindi}$$

$$A_1 - A_2 + A_2 - A_3 + \dots = A_1 + \frac{A_2 A_3}{A_1 - A_2} + \frac{A_1 A_2}{A_2 - A_3} + \frac{A_2 A_3}{A_3 - A_4} \text{ ecc.}$$

Per la seconda serie si fa

$$b = \frac{m\beta}{A_1}, \quad c = \frac{\beta\gamma}{A_2 - 1}, \quad d = \frac{\gamma^2 A_2}{(A_2 - 1)(A_3 - 1)}, \text{ ecc.}$$

$$\text{e posto} \quad \alpha = m\beta = A_1, \quad \beta = A_2 - 1, \quad \gamma = A_3 - 1, \text{ ecc.}$$

si ottiene

$$b = m, \quad c = \beta = A_2, \quad d = A_3, \text{ ecc. d'onde nasce la trasformazione}$$

$$\frac{m}{A_1} \rightarrow A_1 \\ \frac{m}{A_2-1} \rightarrow \frac{A_2}{A_2-1} \rightarrow \frac{A_2}{A_2-1} \text{ ca.}$$

Sia per es. $m=3, A_1=A_2=A_3$ ca. $=5$, si ha

$$\frac{3}{5} = \frac{3}{5} + \frac{3}{5} = \frac{3}{5} = \frac{3}{5} \text{ ca.} = \frac{3}{5} + \frac{3}{5} + \frac{3}{5} \text{ ca.}$$

La 3.^a serie somministra

$$b = \frac{\beta}{A_1}, \text{ ca. } \frac{\beta A_2}{A_2-A_1}, \text{ da } \frac{\gamma^2 A_2}{(A_2-A_1)(A_3-A_2)}, \\ c = \frac{\beta A_2^2}{(A_2-A_1)(A_3-A_2)}, \text{ ca.}$$

e supponendo

$$\beta=A_1, \gamma=A_2-d_1, \delta=A_3-d_2, \text{ ca.} \\ \text{ottenesi } b=1, c=A_1^2, d=A_2^2, e=A_3^2, \text{ ca. ed}$$

$$\frac{1}{A_1} = \frac{1}{A_2} + \frac{1}{A_3} \text{ ca.} = \frac{1}{A_1} + \frac{A_2^2}{A_2-A_1} + \frac{A_3^2}{A_2-A_1} + \frac{A_3^2}{A_3-A_2} \text{ ca.}$$

Sia per es. $A_1=3, A_2=5, A_3=7$ ca.

cioè la serie $1 = \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7}$ ca., che nella Tri-

gonometria vedemmo $= \frac{1}{4} \pi$ ($\approx 45^\circ$), e si avrà

LIBRO II.



ANALISI FINITA.

§. 85. **D**ue sono i modi in cui l'analisi finita naturalmente si divide: il primo costituisce l'analisi determinata, la quale insegna opportuni metodi onde soddisfare ai quesiti, che dipendono da un numero d'incognite, eguale a quello dei rapporti assegnati fra di uno ed uno o più quantità note; e divisi determinata, non perchè tali sempre si suppongano e siano le questioni che si contemplano, ma perchè determinato è il numero de' valori soddisfacenti che possono competere alle incognite. Unico per es.° secondo l'equazione a di 1.° grado in x , due possono essere le soluzioni (§. 84. es.° 1.°) (*): tra le equazioni sia del grado 3.°: come nel seg. problema: Trovare un numero il cui cubo aumentato di 11 volte il numero stesso, e diviso del suo semplice quadrato, faccia 6, che dà $x^3-6x^2+11x-6$, cioè un'equazione verificata dai numeri $x=1, 2, 3$.

In generale, uno ed m può secondo (§. 84. seg.) il numero delle soluzioni in l'equazione del problema sia del grado m .^{mo}. Quando all'incognita

(*) E' per doppia la soluzione del seguente che proporrò a' giovani per esercizio.

È noto che un arco di un primo semicerchio ha molti altri due termini: la sua tangente in arco, e la sua degli altri il 2.° nel diametro di uno semic. Quali sono i termini?

Un'equazione di più delle incognite si suppone quando non sia data, il che accade in il caso la tangente in arco, etc.

de' rapporti dati manca un'unità per egguir quella delle incognite, e si vogliono per li problemi di 1.^a grado, interi pueri i valori di esse; interi e razionali per li problemi di un grado superiore al 1.^o, l'analisi prende il nome di *algebraica*, la tale ipotesi il probl. può essere determinato, qual'è per es.^a quella espresso con l'equazione $15x-7y=17$, che solamente vien soddisfatta da $x=2$, $y=1$, ma tal equazione è accidentale, e grandemente il numero delle soluzioni è moltiplice, spesse grandissime, talvolta infinito.

Ciò che vuole integrarsi relativamente ai problemi per cui si ha un numero di rapporti, minore di due unità di quelle delle incognite, può riguardarsi come un'appendice dell'analisi *algebraica*. Tali problemi poi li differenziamo in *indeterminati* perchè trovano sovrabbondanza, e nell'espressione che nel concetto, il titolo che loro vuol darsi di più che *indeterminati*, ed avranno luogo di darne in seguito la ragione.

CAPITOLO I.

Teoria generale dell'equazione algebrica.

§. 86. Un'equazione di qualsivoglia grado può rappresentarsi per

$$px^m + p_1x^{m-1} + p_2x^{m-2} + \dots + p_{m-1}x + p_m = 0 \dots X$$

ed in ogni caso particolare, i coefficienti p, p_1 ec. son numeri dati. Posto che almeno un valore d' x esista il quale la verifichi, valore che chiameremo *radice*, e la cui esistenza prevederemo che si assume come una verità di fatto, com-

provata dall'esperienza (*), chiamandolo a_1 , è sempre $x=a_1$ un esatto divisore di X , dove si prende a_1 se la risolvante sia positiva, vale a dire se $x=a_1$. Infatti non si può supporre

$\frac{X}{x-a_1} = X_1 + \frac{R}{x-a_1}$, cioè che si abbia un residuo R , perchè moltiplicando per $x-a_1$ ne proviene

$$X = X_1(x-a_1) + R,$$

equazione che si riduce a zero $\pm R$ quando si fa $x=a_1$, mentre R accuratamente priva della x , altrimenti la divisione darebbe qualche altro termine oltre X_1 , non può essere in forma dell'ipotesi $x=a_1$. E' dunque assurdo che il residuo esista e può az.

Si come $X_1=0$ ha una risolvante, chiamandola a_2 si ottiene

$$\frac{X_1}{x-a_2} = X_2; \text{ così } \frac{X_2}{x-a_3} = X_3, \text{ e. ad } \quad "$$

$$X = X_1(x-a_1) = X_2(x-a_1)(x-a_2)$$

$$= X_3(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3) \text{ ecc. ecc.}$$

dal $X = (x-a_1)(x-a_2)(x-a_3) \dots (x-a_m)$.

Per es.^o $x^4-2x^3-3x^2+58x-24=0$ equivale ad $x^4-2x^3-22x^2+24x+24=0$ (2-1)(2+1)(2-3)(2+3)=0, e per $x=2, -2, 3, -3$ corrispondono alle risolvanti positive $x=1, x=2, x=3$, mentre $x=+3$ si riferisce alla negativa $x=-4$.

Si vedrà che ognuno dei valori 1, 2, 3, -4, sostituito per x verifica la proprietà riducendola a zero, nel che consiste la caratteristica delle risolvanti.

(*) E' dimostrato nella *Scienza del Calcolo* (Appl. il Generalized Binomial e Solution) che bisogna l'importanza di adattare perfettamente, ma si limitano a dire, che per non ricorrere al calcolo del libro, preferiscono di seguire una solida dimostrazione da loro prodotta.

col
§. 87. Si facciano le seguenti operazioni

$$\begin{aligned}(x-a_1)(x-a_2) &= x^2 - (a_1+a_2)x + a_1a_2, \\ (x-a_1)(x-a_2)(x-a_3) &= x^3 - (a_1+a_2+a_3)x^2 \\ &\quad + (a_1a_2+a_1a_3+a_2a_3)x - a_1a_2a_3, \text{ ec. ec.}\end{aligned}$$

Correlativa all'ultima la successiva moltiplicazione ha ad un determinato numero μ di fattori, avendosi che il prodotto di

$$x^\mu + p_1x^{\mu-1} + p_2x^{\mu-2} + p_3x^{\mu-3} + \dots + p_{\mu-1}x + p_\mu$$

$\overbrace{x^\mu}^{\text{pot}}$	$\overbrace{x^{\mu-1}}^{x+b}$				
$\div x^{\mu-1} + p_1$	$x^\mu + p_2$	$x^{\mu-1} + p_1$	$x^{\mu-2} + p_2$	$x^{\mu-3} + p_3$	$x + p_\mu$
$\quad \quad \quad + b$	$\quad \quad \quad - b p_1$	$\quad \quad \quad - b p_1$	$\quad \quad \quad - b p_2$	$\quad \quad \quad - b p_{\mu-1}$	$\quad \quad \quad$

che $\begin{cases} p_1 + b \\ p_2 + b p_1 \\ p_3 + b p_2 \\ \dots \\ p_\mu + b p_{\mu-1} \end{cases}$ costituiscono le rispettive somme delle quantità $a_1, a_2, a_3, \dots$ di loro prodotti binari, de' prodotti ternari ec. e si concluderà:

Che qualunque sia il grado m di una data equazione, il coefficiente del x^m termine è la somma negativa delle radici, quello del $3.^o$ la somma de' loro prodotti binari; la somma negativa de' prodotti ternari quello del $4.^o$ ec. sino a p_m (coefficiente d' x) che è il prodotto di tutte le radici, preso col segno contrario se m è dispari.

§. 88. La formula $x = \frac{1}{2}(-p \pm \sqrt{p^2 + 4q})$ (36), se $q < 0$ e $p^2 < 4q$,

$$p < 0 \text{ e } p^2 < 4q,$$

dimostra che le radici di un'equazione di $2.^o$ grado talvolta sono immaginarie e ridotti alla nota forma $A \pm p\sqrt{-1}$. Dice che tal radicalità compete alle radici immaginarie di qualunque equazione. Infatti, una funzione qua-

sia è necessariamente un caso particolare di una funzione letterale, poichè basta concepir nella prima scrivendo le operazioni che l'hanno prodotta, per vedere che mediante la sostituzione di una diversa lettera in vece di ciascun fattore numerico definito, si ottiene la funzione letterale di cui si tratta. Ma ogni funzione algebrica immaginaria è riducibile alla forma $A+BV'-1$ (A, B); dunque è tale anche ogni funzione razionale, e quindi anche ogni eliminante immaginaria, qualunque ne sia l'espressione, e numerica e letterale.

§ 83. La proposta equazione esclude per ipotesi una razionale funzione d' x , supponga che una delle a_1, a_2 ecc. per es. a_1 , sia $A+BV'-1$ perchè $(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)(x-a_4) \dots (x-a_n) [A+BV'-1]$, cioè il prodotto della funzione reale $(x-a_1)(x-a_2) \dots (x-a_n)$ per un binomio immaginario, non può esser reale. Sia dunque un'altra eliminante $a_1=C+DV'-1$, e per ciascuna equante

$$a_1=A+BV'-1, a_2=C+DV'-1.$$

Affinchè il prodotto

$$(x-A-BV'-1)(x-C-DV'-1), \text{ cioè} \\ x^2-(A+C)x-(B+D)xV'-1+(AD+BC)V'-1 \\ \rightarrow AC-BD$$

resti reale, bisogna che i termini immaginari si chiudano, ed a tal effetto l'equazione

$$AD+BC=(B+D)x$$

deve restar soddisfatta indipendentemente dai valori d' x ch'or si suppongono iguali e qualunque, tale a dire che dev'essere

$$B+D=0, AD+BC=0.$$

Ma queste danno $D \equiv -B$, $C \equiv A$. Dunque la n^{a} risolvete immaginaria non ammette altro simbolo che $A-BV'-1$.

Da ciò deriva 1.^a Che il prodotto di due fattori immaginari di primo grado

$$(x-A-BV'-1)(x-A+BV'-1) = (x-A)^2 + B^2$$

è sempre positivo.

2.^a Che una terza risolvete immaginaria $C+DV'-1$ ne richiede un'altra $-C-DV'-1$, e così via; vale a dir che il numero delle risolvete immaginarie è $= \frac{n}{2}$ eccetto in numero intero positivo.

3.^a Che il prodotto di tutti i fattori immaginari di 1.^a grado, con'equivalente ad

$$[(x-A)^2+B^2][(x-C)^2+D^2] \text{ ec.}$$

(prodotto che diciamo P), è generalmente positivo.

4.^a Che, siccome due fattori reali di 1.^a grado se compongono uno reale di 2.^a, ogni equazione del grado numero è risolvibile in n fattori reali di 1.^a grado; e se avremo uno di 1.^a se n è dispari.

5.^a Che ogni equazione di grado dispari ha un dispari num.^o di risolvete reali; che le ha pari se no il suo grado.

§. 90. Dai due §. prec. risulta che qualsivoglia equazione, la quale sia priva di uno o più termini, ha le risolvete affette da questo segno, e che nella predetta ipotesi le risolvete immaginarie debbono essere della forma

$$BV'-1, -BV'-1.$$

Si procede dall'ultimo termine, la cui mancanza prova che almeno una risolvete è $=0$. Diciamo almeno perchè si ha due volte $x=0$ quando mancano gli ultimi due termini, e così via.

§. 91. Posta la X sotto la forma

$$(x-a_1)(x-a_2) \dots (x-a_n)P^m, \text{ ec. } f$$

1. 2. 3. 4. 5.

dove si suppone che il numero delle radici reali sia $\geq n$ («ca») ed $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$, il vale che facendo $x=a$ («ca») ciascuno de' fattori semplici diviene un numero positivo, e che $x=h(a_1, a_2, \dots, a_n)$ li rende positivi tutti a riserva dell'ultimo $x-a_n$. Da ciò ne segue che il valore numerico equivalente al prodotto J , giacchè P sempre >0 (§ 9. n.° 3.°), è positivo nella prima ipotesi, negativo nella seconda. Succederebbe lo stesso se fosse $h=a_{n-2}$ o $>a_{n-2}$, ed in generale se h , a corrispondenza tra di loro un dispari numero di radici reali. Tal variazione di segno, d'altronde incompatibile con la natura di un prodotto di fattori semplici immaginari, con la natura cioè di un'equazione di cui sono tutte immaginarie le radici, dimostra:

Teor. Che qualsivoglia equazione, la quale riduca, mediante la sostituzione di due numeri reali h , k per x , ad un numero di segni diverso, ha per lo meno una radice reale compresa fra h e k .

Viceversa: Se fra 0 ed m , inclusivamente, non esistono due numeri, che sostituiti per x diano le due somme di segni diverso, la proposta equazione qualunque radice reale possiede.

§ 92. Il 1.° membro di un'equazione che abbia tutte le radici immaginarie non mai può rendersi «ca (§ 9. n.° 3.°): se abbia le radici reali tutte negative come in

$$(x+a_1)(x+a_2) \dots (x+a_n) P=0,$$

è impossibile che divenga «ca quando si fa $x=0$: ma in questa ipotesi l'equazione

$$(P) \dots x^m + p_1 x^{m-1} + \dots + p_m = 0 \text{ si riduce a } -p_m$$

Donque non ha, per lo meno, una radice reale e positiva.

Supponendo le radici reali tutte positive, siccome (§. cit.) anche il loro num.^o è pari, il suddetto primo membro, cioè

$$(x-a_1)(x-a_2)\dots(x-a_m)^{2p},$$

si rende positivo con loro zero; ma tal valore d' x rende negativo il 1.^o membro dell'equazione (7): dunque le sue radici reali non sono tutte positive, e perciò, senza l'analisi analitica dell'equale si può concludere:

TEOR. Che ogni equazione di grado pari, il cui ultimo termine sia negativo, ha per lo meno due radici reali, una positiva l'altra negativa.

§. 52. Fatto $x=a+\frac{1}{l}$, dove $\frac{1}{l}$ è una frazione finita irriducibile, l'equazione generale

$p_0x^m+p_1x^{m-1}+\dots+p_{m-1}x+p_m=0$ si trasforma in

$$p\left(a^m+ma^{m-1}\frac{1}{l}+\dots+\frac{1}{l^m}\right)+p_1\left(a^{m-1}+(m-1)a^{m-2}\frac{1}{l}+\dots+\frac{1}{l^{m-1}}\right) \\ \dots+p_{m-1}\left(a+\frac{1}{l}\right)+p_m=0,$$

e moltiplicandola per l^{m-1} , tutti i suoi termini divengono interi a riserva di $p\frac{l^{m-1}}{l^m}$ che si riduce

a $p\frac{l^{m-1}}{l}$, num.^o fraz.^o in p indivisibile per l (*).

(*) Attribuita ad l prima ad a , ciascuno de' quattro primi num. sempre si div' senza resto da ciascuno di quelli che sempre possono e: ma la moltiplicazione di l a l ... non produce altro che un numero primo, tanti numeri sempre: dunque non che l^m è primo ad l e pari ad

Daque ogni equazione il cui primo termine sia
 un coefficiente T avrà anche qualsivoglia
 risolta della forma $a + \frac{b}{T}$: può considerarla se
 il coefficiente del primo termine sia divisibile
 per T . Così l'equazione $35x^3 - 5x - 1 = 0$ ha le ri-
 solventi $\frac{1}{5}, -\frac{1}{5}$.

CAPITOLO II.

*Trasformazioni di una data equazione algebrica
 e loro usi.*

§. 94. Facendo $x = y + d$, ipotesi per cui le ri-
 solventi della proposta si differenziano dal nu-
 mero d , (*) si ottiene

$$\left. \begin{array}{l} y^m + p_1 y^{m-1} + \dots + p_m = 0 \\ y^{m-1} + \dots + p_{m-1} y + p_m = 0 \\ \dots \\ y + p_1 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

Siccome d è indeterminato possiamo sottoporlo ad
 una condizione che ci giovi. Tal'è, ad es., che
 si faccia uscire $p_1 + md$, coefficiente che resta
 subito soddisfatto mediante il valore di d ricavi-
 rato dall'equazione $p_1 + md = 0$, che è $d = -\frac{p_1}{m}$.

Questa conversione d'integri: che per trasfor-
 mare un'equazione in un'altra che sia priva del
 n^o termine, basta sostituire ad x una nuova in-

(*) Si sottoscrive con h a $x = y + d$.

cognita y , divisa del coefficiente della x^0 si ottiene z , dove per minimo esponente k si ha (*)

§ 55. Facendo $x = \frac{y}{z}$, la X , il cui x^0 termine si suppone affetto dal coefficiente p , diviene

$$\left(+ C_0 \frac{y^{m+1}}{z^{m+1}} \right) - p \frac{y^m}{z^m} + p_1 \frac{y^{m-1}}{z^{m-1}} + p_2 \frac{y^{m-2}}{z^{m-2}} \dots \left(+ p_{m-1} \frac{y}{z} + p^m = 0 \right)$$

e moltiplicandola per z^m si riduce a

$$p z^m - p_1 y z^{m-1} + p_2 z^2 y^{m-2} \dots + p_{m-1} z^m y + p^m z^m = 0$$

dici ad un'equazione equivalente alla proposta, i cui termini z^0, z^1 ecc. sono rispettivamente moltiplicati per $z, z, z^2 \dots z^m$; e perchè y var E ordinato prodotto dei termini di un'equazione per z, z, z^2 ecc. dà una trasformata le cui z^0 , z^1 ecc. sono quelle della proposta moltiplicate per z .

§ 56. La prec. trasformazione serve $1.^{\circ}$ a liberare il primo termine di una data equazione dal suo coefficiente $p (> 1)$, altro non richiedendosi che fare $x = p$ e dividere per questa somma tutti i termini della trasformata; serve $2.^{\circ}$ a rendere interi i coefficienti che abbiano un denominatore finito, poiché basta moltiplicare la proposta pel minimo moltiplice dei denominatori.

(*) Per ogni equazione della forma $ax^3 + bx^2 + (c+d)x + e$ la prima trasformazione riduce la seguente forma

$$x^3 + (d/a - bx/a^2)x + (c/a - bx^2/a^2) + ex/a^3 = 0$$

$$\text{dove } dx/dx^2 \text{ ed } ex/dx^3 \text{ si può dare}$$

il quale dipende in verità l'equazione e in apparenza l'apparenza.

ri, ed eliminando il coefficiente del primo termine. Così l'equazione

$$x^4 + \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} = 0$$

moltiplicata per 2, dà $5x^4 + 5x^3 + 5x^2 + 5x + 5 = 0$

$$5x^4 + 50x^3 + 55x^2 + 55x + 55 = 0$$

$$x^4 + 10x^3 + 11x^2 + 11x + 11 = 0$$

Quindi $x^4 + 10x^3 + 11x^2 + 11x + 11 = 0$.

Le radici di questa danno per 50 una di quelle della proposta.

Se i coefficienti siano frazioni decimali la riduzione di cui si tratta diventa più facile. Detti per esempio l'equazione

$$x^4 + 5.745x^3 + 6.7847x^2 + 9.745x$$

si moltiplica $x^4 + 5745x^3 + 67847x^2 + 97450x = 0$

Avendosi qualche coefficiente letterale se ne appone il valore a si opera come precedentemente. Giura però accortarsi il caso che l'equazione sia della forma

$$x^n + p_1 \sqrt{x} x^{n-1} + p_2 x^{n-2} + p_3 \sqrt{x} x^{n-3} \dots$$

e $\sqrt{x}$ si trovi in tutti i termini di ordine pari, perchè $x = y^2$ dà più speditamente la trasformazione richiesta.

CAPITOLO II.

Della eliminazione delle incognite.

§. 57. Si è veduto (§4) che dato due equazioni di 1.^a grado in x, y , può sempre ricavarne una dello stesso grado, in cui restando l'una o l'altra incognita, come più si gradisce. Ciò si può eliminare. Lo stesso istante si ottiene con

un artificio proposto da Bezout (*) il quale ha il pregio di ricondurre all'equazioni de' gradi superiori.

Avendosi $ax+by=c$, $Ax+By=C$,
(equazioni che vogliono liberar da fattori comuni e da incognite) talqual la 1.^a $\times A$ della 2.^a $\times a$ e dal risultamento

$$\begin{aligned} & (aB-bA)y=acC-aA \quad \text{traggasi} \\ & \left\{ y=\frac{acC-aA}{aB-bA} \text{ ed } x\left[\frac{aB-bA}{a}=\frac{C-bA}{A}\right]=\frac{aB-bC}{A-1A} \right\} \dots (A) \end{aligned}$$

Per dedurre x , y e z dal sistema

$$ax+by+cz=d \dots (1)$$

$$Ax+By+Cy=D \dots (2)$$

$$ax+By+yz=d \dots (3)$$

si formano le differenze $c(1)-C(1)$, $y(1)-C(1)$,

$$\text{cioè } (cA-aC)x+(bB-bC)y=cD-dC,$$

$$(cA-aC)x+(yB-bC)y=yD-bC.$$

Questa si trattano come l'equazioni (A), il valore d' x , y , si sostituisce in una delle proposte e se ne ricava z .

Scolgasi per esercizio il seguente:

Probl. La caccia di tre giorni ha fruttato a Tizio lire 72; si sa ch'egli prese:

nel 1.^o giorno tordi n.^o 40; lodole 20; fringocelli 30
nel 2.^o " " tordi 20; lodole 50; fringocelli 60
nel 3.^o " " tordi 20; lodole 20; fringocelli 150;
che della vendita totale, in ognuno de' rispettivi giorni ricavò lire 16, lire 20, lire 56, e vorrebbe sapere a quanto rilegga il prezzo di vendita di ciascun uccello delle tre specie addette.

L'equazioni da risolvere sono

(*) Anal. des Indes de Paris 1784.

Dell'equazioni di n.º grado

§. 101. L'equazioni di n.º grado, di cui, per ordine all'ordine didattico, incidentalmente si studia la soluzione (§ 95), meritano alcune speciali osservazioni che giustano ad esporre.

I. Se $q < 0$ in $x^2 + px + q = p^2 - 4qq$, la formula

$$x = \frac{1}{2}(-p \pm \sqrt{p^2 - 4qq})$$

è immaginaria, e dimostra non esservi alcun numero soddisfacente al quesito.

II. Essi è reale in due ipotesi, cioè che sia $q > 0$ ovvero $p^2 > 4q$, ma la risultanti non sempre costituiscono entrambe una soluzione.

Esempl. 1.º Un negoziante ha impegnato 100 mila lire nel commercio per due anni consecutivi, e si sa che al termine del 1.º il suo capitale sarà diventato di $\frac{1}{2}$ di ciò ch'aveva all'origine del 1.º. A quanto per 100 ascende l'annua perdita? Soluzione. Detta x l'annua perdita su 100 lire si ha

100 : x :: 10000 : 10000 - 10000 x ... perd. del 1.º an.
 Il capitale avendo così ridotto a 10000 - 10000 x ,
 sta 100 : x :: 10000 - 10000 x : 10000 - 10000 x^2
 perd. del 2.º an. :

La somma d'ambidue le perdite, cioè 10000 - 10000 x^2 , dev'essere $= \frac{1}{2}(10000 - 10000 x)$ onde $= 5000 - 5000 $x$$, e dividendo per 10, 1000 - 1000 $x^2 = 500 - 500 $x$$, equazione che si deve mettere sotto la forma $x^2 + px + q$, per la che bisogna render positivo il termine $-x^2$, e dividere in un membro i coefficienti affetti da x . A tal effetto aggiunga x^2 all'uno ed all'altro membro nell'eq. 1000 x ,

ed ottengo $2011600 - 2160x + x^2$

ovvia $x^2 - 2160x + 1600$;

Quattro per altro che lo stesso risulterebbe' lo avrei più presto conseguito togliendo tutti i segni d'ordine $x^2 - 2000000x + 1600$,

e sottraendo 1600, operazione che fa sparire il termine 1600 del 2.^o membro e lo trasferisce col segno contrario nel 1.^o I segni di tal'equazione si possono dunque mutar tutti, e qualunque termine si può trasportare da un membro all'altro perchè gli si dia il segno contrario.

Solta l'equazione $x^2 - 2160x + 1600$, si trova

$$2160 \pm \sqrt{2160^2 - 4 \cdot 1600} = 2160 \pm 1003,63 = 3163,63 = 2056,37:$$

ma il 2.^o valore risponde alle condizioni, perchè il negoziante avrebbe al termine del 1.^o anno un debito di circa 208 mila lire, e per far sì che riducasi a $\frac{1}{2}$ nel fine del 2.^o anno dovrebbe guadagnare durante questa la somma di lire 40900, mentre si suppone fatta egual perdita in ciascuno de' due anni.

Esemp. 2.^o Alcuni ordinano una cena e ne pagano il prezzo nella somma di scudi 12: al termine della cena, due non avendo denari, appellano gli altri, e così la spesa viene aumentata di uno scudo per ciascheduno. Quanti erano i convitati? Soluzione. Se il numero convitati fosse $= x$ la spesa di ciascheduno sarebbe $\frac{12}{x}$: ma dato il pagamento di due convitati, il numero de' contribuenti diventa $x-2$ e pagano per ciascheduno $\frac{12}{x-2}$: ma questa spesa per ipotesi supera di 2 scudi la primitiva e conseguente $\frac{12}{x}$:

daque $\frac{16}{x-2} = \frac{16}{2} + 1$, e moltiplicando per $x-2$,
 moltiplicando per x , e più speditamente per $x(x-2)$,
 si ha $x(x-2)(x-2) = 16(x-2)$ cioè, soppresso $16x$,

$$x^2 - 4x = 16,$$

d'onde $x = 4 \pm \sqrt{16 + 16} = 4 \pm 4\sqrt{2}$, $x_1 = 4 + 4\sqrt{2}$
 e la radice $-4 - 4\sqrt{2}$ scarta, perchè gli termini
 negativi non esistono, e contraddice l'esistenza
 di un numero negativo unitato, che rappresente
 un'effettiva operazione dalla zero. Tal nu-
 mero diviene ammissibile quando esprime un de-
 bito, ed egualmente lo è, come presto vedremo,
 nella Geometria, dove indica situazione contraria
 o correlativa. (*)

Il segno negativo di ambedue le radici si-
 gnifica esseri incongruenti nelle condizioni del
 problema. Tal per esempio sarebbe quello che
 condurrebbe all'equazione, $x^2 + 16x + 15 = 0$ la
 quale mostra di

$x = -8 \pm \sqrt{64 - 15} = -8 \pm 7$, $x_1 = -1$, $x_2 = -15$, mostra che
 l'equazione doveva essere $x^2 - 16x + 15 = 0$, vale
 a dire che si era commessa un errore di segno
 nella conclusione.

Intanto si vede 1.° che non basta risolvere
 un'equazione, ma bisogna sperimentare l'idonei-
 tà di ciascun risultato: 2.° che l'algebra dà
 sempre la soluzione quando esiste, ed inoltre
 quelle ancora del calcolo non prevedute:

(*) Il discorso naturalmente è non generalizzato, mentre
 le importanti analisi metriche, basate quasi sempre di-
 stintamente da principi oggettivi, con tutti quei calcoli
 applicati ed usati, è l'unica maniera di rappresentare le equa-
 zioni dell'algebra, e il servizio non solo rispetto al calcolo
 ingegneristico. Con il 4.° libro più giustificato posso: essere es-
 sere l'appoggio ingegnere del nuovo metodo.

3.^o che mai non riesce di arrivare a darli equivo-
co nel sogai od annullarli nelle condizioni:
4.^o che sovra, per un meccanico effetto delle
trasformazioni simboliche, e per l'infinita correla-
zione di due o più problemi, universalmente applica-
bili con la stessa equazione, (talvolta per colpa
dell'analista che non ha saputo scegliere la via
più semplice,) offre qualche soluzione superfua:
circo stanza indifferente finchè l'equazione non di-
scende al 3.^o grado, ma che diventa assai van-
taggiosa se tratta di equazioni superiori, la cui
soluzione riesce per ordinario difficile e laboriosa.

C A P I T O L O V.

Soluzioni dell'equazioni di 5.^o grado.

§. 104. La più semplice fra l'equazioni cubi-
che $x^3-q=0$ dà $x=\sqrt[3]{q}$, risolvendo per cui man-
ca se ne trovano due altre, comprese in

$$x^3+q^{\frac{1}{3}}x+q^{\frac{2}{3}}=0, \quad +$$

quadrata di $x^3-q=0$ per $x=q^{\frac{1}{3}}=0$, e sono (36)

$$x=q^{\frac{1}{3}}\left(\frac{-1\pm\sqrt{-3}}{2}\right) (x)$$

Se l'equazione è completa, si elimina il 3.^o
termine (34), si riduce ad $x^3+px+q=0$, e per
aver una trasformazione che permetta all'ultimo
del calcolatore un'azione modificata, introdu-
cesi una doppia indeterminata, con dare $x=y+u$,
il che dà

(*) Siano q e u sotto al 3.^o radice, $u=\frac{12\sqrt{-3}q^{\frac{1}{3}}}{5}$, e posti

$\sqrt[3]{x}=\sqrt[3]{y}+\sqrt[3]{u}$, $\sqrt[3]{x}=\sqrt[3]{y}+\sqrt[3]{u}$, la radice cubica di qualunque quan-
tità è sempre,

$$\left. \begin{aligned} y^3 + 3y^2x + 3yx^2 + x^3 \\ - 3xy - 3x \\ - 3q \end{aligned} \right\} = 0$$

Una delle y , e essendo arbitraria si può esigere ch'ella soddisfaccia ad una certa condizione compatibile coi principj del calcolo, che renda per es.^o $x=0$ la somma di alcune termini, e lasci tale il rimanente della trasformata, che possa trattarsi con alcune de' suoi metodi. Fra tutte le combinazioni possibili una infatti si trova del tutto idonea ed è, che l'arbitraria y verifichi l'equazione

$$3y^2x + 3y^2 + 3x(y+x) = 0 \text{ ossia } (3y^2 + 3)(y+x) = 0;$$

Questa infatti, siccome $y+x (=x)$ non può esprimersi $=0$ si riduce a $3y^2 + 3 = 0$, e l'equazione $= \frac{p}{3x}$

che dà per y è tale, che posta nella trasformata ridotta $y^3 + 3x^2 + 3q = 0$, somministra

$$= -\frac{p^3}{27x^2} + 3x^2 + 3q = 0 \text{ ossia } x^2 + qx^2 = \frac{p^3}{27},$$

d'onde

$$x^2 = -\frac{1}{2}qx \pm \sqrt{\left(\frac{p^3}{27} + \frac{1}{4}q^2\right)} \text{ e } x = \sqrt[3]{\left[-\frac{1}{2}q \pm \sqrt{\left(\frac{1}{27}p^3 + \frac{1}{4}q^2\right)}\right]};$$

Per conseguenza

$$y \left(= -\sqrt[3]{-qx^2 - q} \right) = \sqrt[3]{\left[-\frac{1}{2}q \pm \sqrt{\left(\frac{1}{27}p^3 + \frac{1}{4}q^2\right)}\right]}.$$

Il segno di $\sqrt[3]{}$ essendo negativo in y quando x è positivo in x , risulta $y+x$, ossia

$$x = \sqrt[3]{\left[-\frac{1}{2}q \pm \sqrt{\left(\frac{1}{27}p^3 + \frac{1}{4}q^2\right)}\right]} + \sqrt[3]{\left[-\frac{1}{2}q \mp \sqrt{\left(\frac{1}{27}p^3 + \frac{1}{4}q^2\right)}\right]}$$

formola che noi diciamo *Tartaliana* (non *Cardanica*) perchè trovata da Niccolò Tartaglia Boscianese, e che si rende completa moltiplicandola per 1, $\frac{1}{3}(1 \pm \sqrt{-3})$. Per comodo, (giacchè il $\frac{1}{27}p^3$

può essere negativo) la metteremo sotto la forma

$$x = \sqrt[3]{a + \sqrt{b}} + \sqrt[3]{a - \sqrt{b}}$$

e per soddisfare alla nota equazione $3yx + y = 0$, la quale esige che yx sia reale ed $= -\frac{1}{3}p$, scri-

viamo $x = \sqrt[3]{a + \sqrt{b}} + \sqrt[3]{a - \sqrt{b}} \dots (I)$

$$\left. \begin{aligned} x &= \sqrt[3]{a + \sqrt{b}} \rho \omega \left(\frac{1}{3}(-1 + \sqrt{-3}) \right) + \sqrt[3]{a - \sqrt{b}} \rho \omega \left(\frac{1}{3}(-1 + \sqrt{-3}) \right) \\ x &= \sqrt[3]{a + \sqrt{b}} \rho \omega^2 \left(\frac{1}{3}(-1 + \sqrt{-3}) \right) + \sqrt[3]{a - \sqrt{b}} \rho \omega^2 \left(\frac{1}{3}(-1 + \sqrt{-3}) \right) \end{aligned} \right\} \dots (II)$$

§. 103. Due ricerche importanti di natura cioè: 1.^a Se e come il valor numerico della formula Terzetica dipenda dalla realtà o immaginarietà delle radici; 2.^a qual metodo debba tenersi per appurare ed' essi pratici l'anzidetto valore.

Qualunque sieno le radici di una data equazione cubica priva del 2.^o termine, siccome la loro somma dev' essere $= 0$ (87), possono rappresentarsi per

$$\alpha, -\alpha + \sqrt{b}, -\alpha - \sqrt{b},$$

poichè $\beta = \alpha^2$ soddisfa al caso che le radici sieno razionali, $\beta = 0$ a quello che due sieno immaginarie, caso in cui la $3.^a$ è razionale, perchè il prodotto [sempre razionale (16)] di due fattori immaginari, moltiplicato per un fattore irrazionale non può risultare insieme da ira-razionali. Serrendo per comodo $\frac{1}{3}\beta$ in vece di β , si può dunque supporre (85)

(I) di modo che il prodotto delle due parti componenti l'espressione $x^3 + 3x + y = 0$ risultasse $= -\frac{1}{3}p$, ma che i due fattori immaginarii fossero le radici

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{a + \sqrt{b}} \omega \left(\frac{1}{3}(-1 + \sqrt{-3}) \right) + \sqrt[3]{a - \sqrt{b}} \omega \left(\frac{1}{3}(-1 + \sqrt{-3}) \right) \\ \sqrt[3]{a + \sqrt{b}} \omega^2 \left(\frac{1}{3}(-1 + \sqrt{-3}) \right) + \sqrt[3]{a - \sqrt{b}} \omega^2 \left(\frac{1}{3}(-1 + \sqrt{-3}) \right) \end{aligned}$$

$$x^2 + px + q = (x - \alpha)(x + \alpha + \sqrt{3}\beta)(x + \alpha - \sqrt{3}\beta),$$

e però

$$x^2 - 3(x^2 + \beta)x + 3\alpha\beta - \alpha^2 = -3x^2 \quad \Bigg\} = 0.$$

Quindi $\frac{1}{2}p = -(x^2 + \beta)$, $\frac{1}{2}q = 3\alpha\beta - \alpha^2$, ed

$$\frac{1}{4}p^2 - \alpha^2 q^2 = (3\alpha\beta - \alpha^2)^2 - (x^2 + \beta)^2 = -\beta(3x^2 - \beta)^2,$$

valore, che per essere $(3x^2 - \beta)^2$ sempre > 0 risulta negativo se $\beta > 0$ in $-\alpha \pm \sqrt{3}\beta$, nella quale spot. tutte le radici sono reali e si ha

$$|p| < 0 \text{ ed } \frac{1}{4}p^2 > \frac{1}{4}q^2 \quad (IV),$$

positiva se lui β sia < 0 ; e facilmente dimostra che la formula Tarsitica compieva reale quando due radici sono immaginarie, ed immaginaria se tutte siano reali. Il α , di quest'è il valore caso irriducibile, caso che molto e lungamente tormentò l'ingegno de' Matematici, male a proposito estimati nel dimension tentativo di correggere la predetta formula di natura incorreggibile, perchè dall'essere $-p$ o sia $3(x^2 + \beta) > \frac{1}{4}(3\alpha)^2 > \frac{1}{4}(3\alpha + \sqrt{3}\beta)^2$, deriva $p > \frac{1}{4}x^2$, e l'ipotesi fondamentale $x(-y + \alpha) = y + \frac{1}{4}$

(in forza di $3yx + p = 0$ e perchè $\frac{1}{2}p = -(x^2 + \beta)$ dà $p < 0$) conduce all'equazione

$$3y^2 - 3xy + p = 0, \text{ o sia } y^2 - xy = -\frac{1}{2}p, \text{ d'onde}$$

$$y = \frac{1}{2}x \pm \sqrt{\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}p} = \frac{1}{2}x \pm \frac{\sqrt{\frac{1}{4}x^2 - p^2}}{\sqrt{3}}.$$

Questa però non è la ragione a priori dell'assoluta incorreggibilità.

La formula (I), come legittimamente dedotta, debbe aver'egual supposto a ciascuna radicale e due perciò esprimersi come o nessuna; ma s'ella, nel caso irriducibile fosse reale non potrebbe esprimersi che non, e nella presente

una forma l'esprime tutte: dunque no. Né l'ultima proposizione abbisogna di lunga prova. Basta osservare che facendo (4a)

$\sqrt[3]{(a+\sqrt[3]{b})} = A + B\sqrt[3]{b}$, $\sqrt[3]{(a-\sqrt[3]{b})} = A - B\sqrt[3]{b}$,
la formola (I) riducesi a a, A , e le altre due rispettivamente si trasformano in

$$-A - B\sqrt[3]{b}, -A + B\sqrt[3]{b};$$

mentre l'ipotesi $\sqrt[3]{(a+\sqrt[3]{b})} + \sqrt[3]{(a-\sqrt[3]{b})} = R$ (qual funzione di p, q) lascerebbe la formola (II) affetta da quantità immaginarie.

Allorché nulla resti a considerarsi dimostreremo altresì (§. seg.) che quando le risolventi sono tutte razionali esiste sempre la doppia re-

dotta esatta $\sqrt[3]{(am\sqrt[3]{b})} = A + B\sqrt[3]{b}$.

L'unico e sostanzial diletto della formola Torricelli si è, diella, quando le risolventi sono razionali, esige l'estrazione della radice cubica esatta de' binomi $am\sqrt[3]{b}$; problema che oltrepassa le forze dell'analisi, la quale non può trovare con metodo diretto e generale il valore di $\sqrt[3]{}$, di una natura triplice, senza il sussidio di un'equazione di 5° grado: ma quest'argomento è concesso con la nostra ricerca, relativa al metodo da tenersi per apparare ne' casi pratici il valore della formola (I).

§. seg. Questi sono i metodi che per l'indichato oggetto sono stati da qui da' Geometri immaginati: il 1.° aritmetico, e consista nella rac-

coltura estrazione delle radici $\sqrt[3]{b}$, $\sqrt[3]{am\sqrt[3]{b}}$: il 2.° algebrico, avente per oggetto di estrarre la radice cubica esatta di $am\sqrt[3]{ab}$, il 3.° al-

$\pm \sqrt[3]{b}$
 cubico anch' esso, e dipendente dall'esperienza
 per serie di $(a \pm \sqrt[3]{b} - \sqrt[3]{b})^3$; il $\sqrt[3]{b}$ trigonometrico.

Non verificandosi il metodo (II), una sola
 risultante è reale razionale, ed il metodo 1° uni-
 camente idoneo per questo caso, può con suffi-
 ciente precisione indicarla,

Sia per esempio $x^3 + 6x - 10 = 0$.

Siccome $\frac{1}{2} \cos(-\frac{1}{2}\pi) = \frac{1}{2}$, $\frac{1}{2} \cos(-\frac{1}{2}\pi) = \frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}\pi$ è la
 solita formula (I) si riduce ad

$$x = \sqrt[3]{(7 + \sqrt[3]{5})} + \sqrt[3]{(7 - \sqrt[3]{5})} \quad \text{e di}$$

$$x = \sqrt[3]{(7 + 3,071)} + \sqrt[3]{(7 - 3,071)} = \sqrt[3]{10,071} + \sqrt[3]{3,929} \\
\text{cioè } x = 0,41 \dots - 0,41 \dots = 0.$$

Casi dall'equazione $x^3 + 6x - 10 = 0$ si deduce

$$x = \sqrt[3]{(10 + 6\sqrt[3]{5})} + \sqrt[3]{(10 - 6\sqrt[3]{5})} = \sqrt[3]{(10 + 6 \times 1,732)} \\
+ \sqrt[3]{(10 - 6 \times 1,732)} = \sqrt[3]{20,383} + \sqrt[3]{-0,383} \\
= 0,7 \dots - 0,7 \dots = 0.$$

Questo metodo, diagonalmente opportuno alla
 famosa circostanza che è sia un quadrato
 ed i numeri $a \pm \sqrt[3]{b}$ sono cubi, lo che succede
 per esempio in $x^3 - 3x + 1 = 0$, richiede quasi
 sempre un calcolo fastidioso; quasi diviene im-
 praticabile ne' frequenti casi in cui a, b sono fra-
 zionari, come per rapporto alla complessione
 $x^3 - 5x + 1 = 0$, che per altro è impossibile il
 solo b , perchè il calcolo definitivo richiede le
 otto successive operazioni che seguono:

$$x = \sqrt[3]{(6 + \sqrt[3]{\frac{11}{27}})} + \sqrt[3]{(6 - \sqrt[3]{\frac{11}{27}})} = \sqrt[3]{6 + 3,596} \\
+ \sqrt[3]{6 - 3,596} = \sqrt[3]{9,596} + \sqrt[3]{2,404} = 0,46 \dots \\
- 0,46 \dots = 0,92 \dots = 0.$$

§. 105. Il 2.^o metodo suppone reperibile

$\sqrt[3]{(a+\sqrt{b})} = x + \sqrt[3]{c}$, espressione dove x, c debbono essere numeri razionali, e che sostituita al cubo produce, $x^3 + 3ax + c(3x^2 + c\sqrt{b})$, una funzione di x, a , tale, che mediante un adatto valore di x e di c può coincidere con $a + \sqrt[3]{b}$, altro non richiedendosi se non che risolvere l'equazione

$$3ax + 3c = (3x^2 + c)\sqrt{b}. \quad (*)$$

Resta da vedere quali razionali l'Algebra offre per determinare x e c . A tale oggetto, pongasi per maggior comodo

$$\sqrt[3]{(a+\sqrt{b})} = \sqrt[3]{x+\sqrt{c}}.$$

Fatto il cubo dei risultate $= a$ la parte razionale e però si hanno l'equazioni

$$3ax + 3c = 3x^2 + c\sqrt{b}; \quad 3\sqrt[3]{c} = (3x^2 + c)\sqrt[3]{b},$$

quindi $(3a)^3 - (3\sqrt[3]{b})^3 = (x^3 - c)^3$,

cioè $x^3 - c = \sqrt[3]{\frac{3a^3 - 3\sqrt[3]{b}}{3}}$,

e bisogna che $\sqrt[3]{\frac{3a^3 - 3\sqrt[3]{b}}{3}}$ sia un num.^o razionale & affinché abbiai razionale $c (= x^3 - \frac{3a^3 - 3\sqrt[3]{b}}{3})$. Sostituita questa espressione di c nell'equazione $3P'$ si ottiene $\frac{3}{4}x^3 - 12ax - 3a = 0$, ossia $x^3 - 52x - 12 = 0$, $...$ (P'') , che debbe avere una risolvibile razionale, altrimenti la richiesta radice sarebbe impossibile. Come risolvere l'equazione (P'') ? Se con la formula Tartagliola si ricade con circolo vizioso a dover trovare $\sqrt[3]{(a+\sqrt{b})}$, giacchè

(*) Per esempio, con $a=1$ una radice soddisfacente quando con $c=1$ $\sqrt[3]{(1+\sqrt[3]{2})}$ infatti non soddisface l'idea per $\sqrt[3]{c}$ e di $3a$ $\sqrt[3]{b}$ $\sqrt[3]{c}$ $\sqrt[3]{b}$ $\sqrt[3]{c}$.

126

$$z = \sqrt[3]{a + \sqrt{a^2 - (a^2 - b)}} + \sqrt[3]{a - \sqrt{a^2 - (a^2 - b)}} \\ = \sqrt[3]{(a + \sqrt{b})} + \sqrt[3]{(a - \sqrt{b})}.$$

Se con altro metodo, si è gettato il tempo, e la d'uopo convenire che quello di cui qui tentata, seppur servir non debba ad altr' oggetto uno l'idea, merita di essere abbandonata come un inutile tentativo (*), quantunque $\sqrt[3]{a + \sqrt{b}}$ sempre esista sotto forma binomia quando almeno non risulti della proposta è razionale, perchè essendo $a^2 - b^2 = (\frac{1}{2}a)^2 - \left(\sqrt[3]{\frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}b^2}\right)^2 = \frac{1}{2}b^2$, le condizioni da cui la sua esistenza dipende, sono sempre soddisfatte: ed i facilissimi esempi espressamente preparati da qualche Autore, sono di stesso peso in contrario.

Il 3.^o metodo è di sua natura incomodo ed approssimativo, si adopera nel solo caso come ora vedremo e qualora le serie esprimanti

$$(a + \sqrt{b})^{\frac{1}{3}}, (a - \sqrt{b})^{\frac{1}{3}},$$

non, come spesso avviene, non convergono, lo sviluppo necessario diventa molto prodioso, e laborioso.

Ecco le serie di cui sopra, serie che nella letterale loro forma nulla possono desiderare per rapporto alla regolarità ed alla eleganza, e che facilmente si deducono dal generico simbolo del §. 41.

$$A = a^{\frac{1}{3}} \left\{ 1 + \frac{1 \cdot 1 \cdot 1^2}{1 \cdot 4} \frac{1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1^2}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 8} \frac{1^2}{2} + \frac{1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1}{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 10 \cdot 13} \frac{1^2}{2^2} - \text{cc.} \right\}$$

(*) Mi sembra dimostrato (V. See. Ital. T. III.) che l'equazione non ha un $\sqrt[n]{a}$ uguale ad un faccile ed un vanto alla ricerca di $\sqrt[n]{a}$ quando a non sia un cubo.

$$B=ac\sqrt{\frac{1}{2}\left\{\frac{1+\frac{a+b}{2}\frac{b^2}{a^2}}{1+\frac{a+b}{2}\frac{b^2}{a^2}}+\frac{1+\frac{a+b}{2}\frac{b^2}{a^2}}{1+\frac{a+b}{2}\frac{b^2}{a^2}}\frac{1+\frac{a+b}{2}\frac{b^2}{a^2}}{1+\frac{a+b}{2}\frac{b^2}{a^2}}\right\}}$$

Quando $b=0$ si trasforma $x+by'-c$ in

$by'-c\left(x-\frac{c}{b}y'-c\right)$ e si forma la potenza $\frac{1}{2}$ dell'uno

e dell'altro fattore. Se a, b siano quasi eguali si fa uso di un trapiago che può vedersi (Sc. del Calc. T. IV, Cap. III.) Questa metodo, attesi gli inconvenienti a cui soggiace, non bastando alla ricerca delle tre risolvanti reali irrazionali, ed anche in tal circostanza l'accorto calcolatore gli preferisce il metodo trigonometrico di cui fa seguito.

§ 106. Profittando dell'esperta discussione precedente, che quando si tratta di risolvere un probl. dipendente da un'equazione cubica, prima di procedere alla derivazione della formula Tacuata, che può riuscire inutile ed inopportuna, giova tentare s'ella abbia risolvanti razionali, rintracciandola con la scelta di due termini molto semplici, che per officio speditezza si adattano ad ogni caso particolare.

Se $x=uf$, u razionale, riducibile ad $x^3+qpx+q=0$, dov' essere

$$x^3+qpx+q=(x^2+ufx+g)(x+f)=x^3+(g+f^2)x+ufg=0$$

e però $g+f^2=p, \quad ufg=q.$

Dividasi q in due fattori, si prendano per f, g , quelli che verificano la $g+f^2=p$ o sia $g=p-f^2$, e sarà f la risolvante. Quando non è possibile verificarla la risolvante non esiste razionale, e fa d'uopo ricorrere ad uno de' metodi 3.° e 4.°

Notisi 1.° che se $p=0$ è $g=p$; se $p<0$ è $-g=p$.
2.° Che a $q=0$ corrisponde uf, ufg , vicea. a $q=0$.
3.° Che il massimo divisore di q resta subito escluso se non sia $p=0$ e $-q$ sia un quadrato, dove

si prende il segno superiore se $q < 0$ e vicev.
La ragione si è che

$$\begin{aligned} x = q & \left\{ \begin{array}{l} \text{danno } q^3 - 4q + q = 0 \text{ ossia } q^3 = (q+4) \\ \text{ } -q^3 - 4q + q = 0 \text{ ossia } q^3 = -(q+4) \end{array} \right. \end{aligned}$$

Es. 1.^a Abbiasi $x^3 - 4x - 4 = 0$. Trova
 $20 = 4 \cdot 5 = 1 \cdot 20$, ed esclusi 1, 20, il primo
perchè troppo piccolo, il secondo perchè 21+1
ora è un quadrato, preso $f=5$, ed attesa l'iden-
tità $4+21=5^2$ in cui $x^3-4x=f^2$
si conglia, essendosi avuto $x=5$. Il fattore

x^3+5x+4 divide $x^3+4x+4=0$ e dà $x=-1, x=-4$.

Es. 2.^a La proposta essendo $x^3+4x+4=0$,
osservo che la linea della $f=4$ è f^2 il qua-
dra non può essere < 4 ; lo dunque $f=5$, e sic-
come $5-4=1=x^2$, e non può supporre $f=6$, se
inferisco $f=2$ cioè $x=0$. Questo metodo da noi
può ampiamente esposto nel cit. vol. della Sci.
Ital.^a è senza dubbio molto più spedito e sem-
plice di quello dei divisori di cui lo seguita.

Cerchisi per ultimo es. $\sqrt[3]{(-20+4\sqrt{11})}$.
Facendole $=x+\sqrt{c}$ si trova l'equazione finale
 $4x^3-17x+4=0$, priva di radici razionali
interi, e ch' esige per conseguenza una transfor-
mazione, ma non se si suppone $x=\frac{1}{2}(y+\sqrt{c})$ si-
bilità si ottiene $x^3-17x+4=0$.

Ripetuti i valori 1, 2, 4 per f , che danno
 f^2 molto < 17 , lo $f=5$, ottengo $8+17=5^2$
e però $x=5$: oppure x^3-4x e trovo

$$h=\frac{1}{2}f, \text{ e } (2x+4\sqrt{c})^3=0;$$

dunque $\sqrt[3]{(-20+4\sqrt{11})} = -\frac{1}{2} + \sqrt{c}$.

Dell'Equazioni di 4.^a grado.

§ 107. La semplicissima $x^4 - a = 0$, facendo $x = y\sqrt[4]{a}$ diviene $y^4 - 1 = 0$ ed equivale ad $(y^2 - 1)(y^2 + 1) = 0$, d'onde $y^2 - 1 = 0, y^2 + 1 = 0$, $y = \pm 1, y = \pm \sqrt{-1}$, e però $x = \pm \sqrt[4]{a}, x = \pm \sqrt[4]{a}\sqrt{-1}$. Bastano due risolvanti $1, \sqrt{-1}$ per avere le altre due $-1, (\sqrt{-1})^3$, e $\sqrt{-1} = (\sqrt{-1})^3 = -\sqrt{-1}$. L'altra eq. di notevole semplicità, $x^4 + px^2 + q = 0$ si riduce al 2.^o grado con fare $x^2 = y$, il che dà $x = \sqrt{y} = \frac{1}{2}p \pm \sqrt{\left(\frac{1}{4}p^2 - q\right)}$.

§ 108. Passando a considerare un'eq. qualunque rappresentando tutto il suo 4.^o termine e la rappresentiamo per $x^4 + px^2 + qx + r = 0$.

Mat. I. Aggiungo ed sottraggo i membri dell'eq. $x^4 - px^2 - qx - r$ al binomio $ax^2 + u^2$, il 2.^o della trasformata

$$x^4 + ax^2 + u^2 = (ax - p)x^2 - qx + u^2 - r \dots (a) \quad (1)$$

è un quadrato, e tale si rende il 2.^o quadrato si determina a la guisa che soddisfaccia alla condizione $(ax - p)(u^2 - r) = \frac{1}{4}p^2$ (*) , cioè posto u per a , all'eq. $x^2 - px^2 - qxi + qxi - q^2 = 0$.

Trovato i e perciò u , si estrae la radice della eq. (a) e la risultante

$$x^2 + u = \pm x\sqrt{(ax - p) \pm \sqrt{(x^2 - r)}}$$

dà i quattro valori x , cioè

(*) Basta osservare che la $x^2x^2 + u^2 - (x^2 - r)\left\{\frac{1}{4}(px + q)^2\right\}$ il prodotto in $x^2x^2 > 0$ del binomio binomio è necessariamente uguale al quadrato della metà del 4.^o

$$x = \frac{1}{2} \left(-\sqrt{4a-p} \pm \sqrt{(4a^2-4(p+1)a+p^2) \pm 4(\sqrt{a^2-p})} \right) \quad (**)$$

§. 109. Met. II. Supponga

$$\begin{aligned} x^2+px^2+qx+r &= (x^2+fx+g)(x^2-hx+ik) \\ &= x^4-(f^2-g-h)x^2+gf(h-g)x+gh+ik. \end{aligned}$$

Il confronto dà $g+h=f^2=p$, $f(h-g)=q$, $gh=ir$.

Dalla 1.^a $\times f$ si ritrae $f(g+h)=fp+qf^2$, e sottraendo l'addizione e la sottrazione della 2.^a

$$\{2fgmf^2+qf+q, 2fg-mf^2-2gf-q\} \dots (B)$$

Il prodotto di queste, sostituendo r per gh , è

$$f^4+4qf^2+(p^2-4r)f^2-q^2=0 \quad (**)$$

e fatto f^2 vari come incognita la resolta

$$x^2+4qx^2+(p^2-4r)x-q^2=0, \dots (C)$$

eq., che ha per lo meno (§§. 3.^o 5.^o) una radice reale positiva. Almeno due sono dunque i reali valori di f ed altrettanto quelli che per g, h , provengono dall'eq. (B), cioè

$$g = \frac{(\sqrt{x^2+4qx^2+q}) \pm \sqrt{x^2+h}(\sqrt{x^2+4qx^2+q})}{2\sqrt{x^2}} \\ \text{dove } \sqrt{x^2} \text{ ha il doppio segno } \pm.$$

(**) Questo metodo è di Luigi Ferret Milanesi, che il primo integrò e risolse l'eq.³ semplice di 4.^o grado, metodo ben degno di costante ammirazione per la sua semplicità, e che ora abbiamo tratto da questo e ricomposto sopra i lavori italiani, di quale era stato il soggetto. I Italiani Germanici e Francesi, (cospicui) maestri di Algebra, Gauss, Cauchy, Serret, Poncelet, Fourier e Lagrange, si occuparono e occupano in quella analisi, che oltre un primo livello presso universalmente superato (Finzione nella prima eq.) non è che il metodo di Serret già veduto che il primo propone da altri. Ferret.

Ferret dà a² in questa proposizione generale, la cui somma sia zero, il prodotto del a² per a², cioè, la la cosa notevole che dunque Ferret all'integrale di un eq.³ (*) ha a trascrivere il risultato di a² termine della proposta, questa eq. sarebbe completa di 4.^o grado, e quindi tutta da sé risolta.

Ciascun fattore di x^n grado, non potendo riferirsi ad una delle sei combinazioni lineari tra i valori d' a , piuttosto che ad un'altra, compaiono sotto sei forme: tutti e sei infatti i valori di f, g, h , provenienti dal co. di x , e tali forme risultano irrazionali se uno valore di x sia un numero quadratico, divisore di g^n .

Si vedrà che due valori di g o di h , purechè derivino da due di f , corrispondenti ad uno stesso valore di x , determinano una coppia di fattori di x^n grado, i quali comprendono tutte le radici della proposta.

Esemp. 1.^o Sia $x^5 - 13x^4 + 10x^3 + 4x^2 = 0$,

per cui $x^5 - 5ax^4 + 10a^2x^3 - 10a^3x^2 = 0$, e

i divisori quadrati 1, 4, 25, di 100 essendo soddisfacenti pongo $f = x(1, a, 5)$ ed ho

$$g = 1a - 2, -2, -3, -3, 4, 6; \quad h = a, -1a, -3, -3, 5, 4;$$

Fa lo $x^5 + f x + g = f + 1g = 1a f = 1g = a$; ed ogni rispettiva coppia di fattori, cioè

$$\{x^2 + ax - 1 = 0, x^3 - x - a = 0\}$$

$$\{x^2 + ax - 8 = 0, x^3 - ax - 3 = 0\}$$

$$\{x^2 + 5x + 4 = 0, x^3 - 5x + 6 = 0\}$$

ci dà tutti i valori $\{3, -4, a, -1\}$ d' x .

Le sei forme d' $x^n \cdot f x + h$ coincidono con le precedenti.

Esemp. 2.^o Per $x^5 + 6x^4 - 2x^3 - 5x^2$ si ha

$x^5 + 6x^4 + 12x^3 - 4x^2 = 0$, e purechè non esiste razionale valore di x conviene fare (34) $x = a - a$ onde avere $x^5 + 9a - 5a = 0$, e dedurre (100)

$$a = \sqrt[5]{15 + \sqrt{(225 + 12)}} + \sqrt[5]{15 - \sqrt{(225 + 12)}}$$

$$= a, 13084977; \quad x = 0, 13084977; \quad f = 12a, 4a, 12a, 6a, 55;$$

$$g = 5, 34, 19055; \quad h = -a, 76, 10536;$$

$$x^4 + 0,4650664555x + 0,9450335444 = 0 \\ x^4 + 0,4650664555x - 0,9450335444 = 0.$$

Dal 1.^o fattore si ha

$$x = 1,105555; x = -0,685033.$$

Nel T. IV. della *Scienza del Calco*, trovai dimostrato: 1.^o che il metodo generale II. è efficace quando siano risolvibili della ridotta (q) è un quadrato; 2.^o che doveva esserlo quando una sola radice sia razionale; e vi ho messo facile e breve per estrarre le radici razionali, analogo a quello del §. 106; ed.

CAPITOLO VII.

Algebra delle radici razionali di qualsivoglia equazione numerica.

§. 109. Se un numero razionale a verifica la proposta onde si abbia identicamente

$$a^{n-1} + p_1 a^{n-2} + p_2 a^{n-3} + \dots + p_{n-2} a + p_{n-1} = 0,$$

trasponendo p_n e dividendo per a , poi trasponendo p_{n-1} e ripetendo la divisione n col la eqq., dotti avere

$$\left. \begin{aligned} a^{n-1} + p_1 a^{n-2} + \dots + p_{n-2} a + p_{n-1} &= \frac{p_n}{a} (aq_1) \\ a^{n-2} + p_1 a^{n-3} + \dots + p_{n-3} a + p_{n-2} &= \frac{a_1 + p_{n-1}}{a} (-q_1) \\ a^{n-3} + p_1 a^{n-4} + \dots + p_{n-4} a + p_{n-3} &= \frac{a_1 + p_{n-2}}{a} (-q_1) \\ &\vdots \\ a^{n-n} &= \frac{p_n + a_1 + p_1}{a} (-q_1) \end{aligned} \right\} \quad (f)$$

cioè un numero m di successivi quozienti interi, e l'ultima cui. Tal è il sistema della condizione da cui dipende che un numero razionale a risolva una data equazione. Alle m divisioni possono sostituirsi altrettanto moltiplicazioni ricicogliendo $a^m + p_1 a^{m-1} + p_2 a^{m-2} + \dots + p_{m-1} a + p_m$ in

$$(a + p_1)(a + p_2)(a + p_3) \dots (a + p_{m-1})(a + p_m) \quad (II)$$

e questa risolvibile ha bene spesso il pregio di costruire anticipatamente l'impossibilità della razionalità quando il divisore sostituito non è idoneo, e riesce comodissima se i primi coefficienti sono piccoli.

Per trovare tutte le risolvibili razionali basta dunque apporre i divisori dell'ultima termine e sostituirli, anche col segno $-$, in uno de' sistemi (I), (II) in vece di a .

Es.^a 1.^a Tentasi di risolvere l'equazione

$$x^4 - 9x^3 + 15x^2 - 10x + 15 = 0.$$

Escluse le x da' divisori $\pm 1, \pm 3, \pm 5, \pm 15$, perchè $1 + 15 - 15$ è pari $-9 + 10$, ed escluso -1 perchè rende positivi tutti i termini, mette a prova il x con la seg. operazione:

$$q_1 = \frac{-15}{1} = -15; q_2 = \frac{-15 + 9}{1} = -6; q_3 = \frac{-6 + 15}{1} = 9;$$

$$q_4 = \frac{-9 + 10}{1} = 1, \text{ e ne inferisce essere } x = 3.$$

L'operazione di $-15, -6, 9$ non abita perchè risulta q_4 frazionario. Fatta la divisione per $x - 3$ resta da risolvere (104)

$$x^3 - 6x^2 + 6x - 5 = 0.$$

La decomposizione (II) verrebbe data

$$5 - 9 \cdot 5 + 15 \cdot 6 - 10 \cdot 6 + 15 = 0.$$

Es.^a 2.^a Arcuandosi $x^4 - x^3 - 5x^2 - 8x - 12 = 0$ fuori

$$\text{avuto } (1, 2, 3, 4, 6, 12)$$

154

e procedendo da $x=1$, valore falso; dal x' che somministra $q_{x'} = \frac{1}{2}$, al ritratto del 3.^o

$$q_x = \frac{12}{1} = 12; q_{x'} = \frac{1+5}{1} = 5; q_{x''} = \frac{3+5}{1} = 8; q_{x'''} = \frac{5+5}{1} = 10$$

e però $x=5$.

Dal dividere $\dot{q}$ deriva $q_{x'}$ frazionaria: gli altri valori danno tale $q_{x'}$.

Quando un numero è moltiplice in p_m si divide la proposta pel prodotto dei diversi fattori razionali, si applica il solito metodo all'equazione depressa e così via. Ciò serve a riconoscere le soluzioni esatte, che noi abbiamo dimostrato (Se. del Calc. Tern. IV.) essere razionali pel 3.^o grado, e pel 4.^o se sono tre; risolvendo che rimangono esclusi quando sono razionali e p_m non ammetta un divisore moltiplice.

L'es. che segue farà molto meglio conoscere l'importanza del metodo di cui ci occupiamo. Sia l'eq.

$$x^6 - 15x^5 + 107x^4 - 353x^3 - 155x^2 + 611x^3 + 379x^2 + 461x - 545 = 0.$$

Scoperti i divisori 1, 5, 5, 5, 7 di 545, rigetto il 1.^o manifestamente sotto; deduco dal 5.^o

$$q_x = \frac{545}{1} = 175; q_{x'} = \frac{545-150}{1} = \frac{395}{1} = 395; q_{x''} = \frac{395-150}{1} = 245; q_{x'''} = \frac{245-150}{1} = 95; q_{x''''} = \frac{95-150}{1} = -55$$

$$q_{x'''} = \frac{150+145}{1} = 295; q_{x''''} = \frac{-150+145}{1} = -5; q_{x'''''} = \frac{-5+145}{1} = 140; q_{x''''''} = \frac{140-145}{1} = -5$$

$$q_{x'''''} = \frac{145-140}{1} = 5; q_{x''''''} = \frac{-145+140}{1} = -5; q_{x'''''''} = \frac{-5+140}{1} = 135; q_{x''''''''} = \frac{135-140}{1} = -5$$

Con eguale facilità ritrovato $x=5$, $x=7$, e infine la proposta per

$$(x-5)(x-5)(x-7) \text{ cioè per } x^3 - 15x^2 + 71x - 165$$

$$\text{otengo } x^3 - 3x^2 - 9x^2 - 5x^2 - x + 5 = 0;$$

e perchè l'ultima termine 545 era due volte di-

visibile per 5, e tal' è pure l'ultimo della decomposizione, tanto se abbiamo

$$5-2(5-5)(5-5)5-1(5-5)=0.$$

Ciò succedendo divide la prec. per $x-5$, il che ci dà

$$x^3+3x^2+3x-1=0,$$

equazione che risolta coi noti metodi somministrerà

$$x=-\frac{1}{2}(1+\sqrt[3]{-3}), x=\frac{1}{2}(1+\sqrt[3]{3}).$$

si hanno così tutte le soluzioni e le radici di zero

$$5, 5, 5, 5, 7.$$

§. 111. Si sa (§90) che quando il 1.^o termine è pot.^m le soluzioni razionali possono essere finite e limitate, ed è chiaro che questo rimangono invariabili all'opposto metodo. Prima di applicarlo si è uopo dunque liberare il 1.^o termine della proposta dal coefficiente p (§85), avvertendo poi di dividere per p le soluzioni risultanti della trasformata.

Il metodo diviene operoso in alcuni casi nei quali non pochi e grandi sono i coefficienti, e p ha un ampio numero di divisori; ma non altro, se il grado dell'equazione sia superiore al 4.^o, è semplice se non uade di tutto.

CAPITOLO VII.

Soluzioni in numeri interi positivi di qualsivoglia equazione di 1.^o grado affine da due o tre incognite.

§. 112. Un problema che dipende da un'equazione della forma $ax+by=c$ è indeterminato, perchè qualunque valore y , d' x ne dà uno d' x

espresso per $x_1 = \frac{1}{2}(c - by_1)$, ma queste soluzioni non interessano né la curiosità né il bisogno; prescriviamo convenienti limiti ai valori di x, y , esigendo che siano interi e positivi, ed il questo diromendo sembrerebbe potrà esser pregioso ed importante.

Prima d'intraprendere la soluzione della proposta nell'anzidetta ipotesi, si osservi:

1.^a Che a, b, c si suppongono interi, perchè si rendono tali moltiplicando l'equazione pel minimo moltiplice di tutti i denominatori.

2.^a Che a, b si riguardano come primi tra loro, perchè dall'essere $a = a'\theta, b = b'\theta$ deriva

$a'x + b'y (= \frac{c}{\theta}) = c'\theta$, cioè $c = c'\theta$, altrimenti il 1.^o

numero intero equivarrebbe ad un numero frazionario o frazionario. Soppresso il letter comune θ resta $a'x + b'y = c'$, dove a', b' sono primi tra loro.

3.^a Che una soluzione $x = a', y = y'$, quando è $b < ca$, ne dà infinite di $ax + by = c$, comprese nel sistema $x = bc + a', y = ca - y'$, dove i rappresenta un intero, anche negativo perchè sia

$i < \frac{c'}{b}$ e $i < \frac{c'}{a}$; sistema che dà per x, y , le rispettive progressioni:

$$a', x' + b, x' + 2b \text{ ec. } y', y' + a, y' + 2a, \text{ ec.}$$

4.^a Che nelle ipot. precedenti tutte le soluzioni di $ax + by = c$ sono espresse per

$$x = x' + bi, y = y' + ai,$$

soluzioni, il cui numero in forza de' supposti $i < \frac{c'}{b}$, $i < \frac{c'}{a}$, è sempre finito e talvolta nullo.

5.^a Che c può essere negativo non è mai vero altrimenti, perchè la formula $ax + by = c$ è in-

compatibile con l'ipotesi che x, y siano positivi.
 § 113. Ciò porta deducendo

$$\frac{\frac{1}{a} - \frac{1}{a_{m+1}}}{\frac{1}{a} - \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} \text{ ecc.}} \rightarrow \frac{1}{\frac{1}{a_m} + \frac{1}{a_{m+1}}} \quad (**)$$

$$\text{vale a dire } \frac{1}{a} \left(= \frac{1}{a_{m+1}} \right) \text{ da } \frac{1}{a_m} - \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} \text{ ecc.} \rightarrow \frac{1}{a_m}$$

onde avere (10)

$$a_m a - a_m b = (-1)^{m+1} \dots (1)$$

dove $(-1)^{m+1}$ è $-\infty$ se m è pari, cioè se dispari
 sia nella serie $\frac{a_1}{a_1}, \frac{a_2}{a_2}, \text{ ecc.}$ (***) l'ordine della

frazione ottenuta $\frac{a_{m+1}}{a_{m+1}}$.

Dalla proposta moltiplicata per a_m si ricava

$$a_m y = a_m \frac{a}{1} - a_m \frac{a^2}{1} \dots (2)$$

oppure $a_m \frac{a}{1} - a_m \frac{a^2}{1} \dots (3)$ traggasi

(*) Si suppone $a > 0$ e che i termini possibili per a dipenda
 dal numero arbitrario che si assume a l'incognita allora del cal-
 colo non si può.

(**) Si suppone $\frac{1}{a}$ perché questa è uguale a $\frac{1}{a}$.

$$a_n \cdot \frac{1}{x} \text{ con } \frac{1}{x} = \frac{(-1)^{m+1}}{b_{m+1}}$$

dall'equazione (1) con $\frac{1}{x}$, trasformare (1) in

$$a_n y + p + \frac{1}{x} = a_n x + (-1)^{m+1} \cdot \frac{1}{x},$$

e si vedrà che i minimi valori di x , atti a rendere il 2.^o membro comparabile all'intero $a_n y$,

sono $x = r$ se $(-1)^{m+1} > 0$, $x = b - r$ se $(-1)^{m+1} < 0$.

Resta da sperimentarsi se l'una o l'altra delle pred. ipotesi da accipre, come si richiede, un valore intero per y , e ciò si verifica nella seguente maniera.

Dalle rispettive equazioni (1), (5) risulta

$$a_n = \frac{1}{x} [a_n b + (-1)^{m+1}]$$

$$\text{con } a_n b + p = \frac{1}{x} [b a_n + (-1)^{m+1} \cdot c - c b];$$

Quindi y sarà

$$\frac{b-a_n}{x} = [c - c b y - b a_n - c] : b a_n - c a_n \dots (4)$$

senza frazione: nella seconda ipotesi si ha pure

$$\frac{b-a_n}{x} = [c - c b (1+q) + b a_n - c] : b a_n - c (1+q) \dots (5).$$

Per ottenere con la massima facilità sotto la più semplice e completa forma tutte le soluzioni della proposta, giura dunque il seguente:

Met. Risolvere $\frac{1}{x}$ in $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2}$ (*) si valen-

ti a_n per mezzo delle formule 1 (p. 84) dove

(*) Nota $\frac{1}{x}$ perché non difficile il calcolo di a_n .

$a_1 = 1$ ed $a_2 = a_3$ (**): si faccia $x = m$ e si disponga, $m < 0$ se punti in vista di ricorrere alle formule (4), (5), mentre caso contrario e che valgano i punti rispetto di a_m , si ponga l'indetto valore di x in $\frac{1-m}{2}$ e si avrà il minimo valore r_1 di y : quindi la soluzione generale:

$$[x = m + \pi, y = m + \pi, \dots] \quad (6)$$

dove si dà il segno $-$ ed uno dei termini m, π , quando $m < 0$, con l'avvertenza di preferir quello che produce maggior latitudine nella rispettiva differenza $r - h, r_1 - m$. (**)

Es.^a 1.^a Sia l'eq. $55x - 55y = -11$, e però $y = \frac{m-10x}{5}$.
Risulta

(**) L'uso di una formula generale esprime a_m per a_1, a_2 ed a_m , come anche esprime in corrispondenza con il compimento le operazioni sopra indicate]

$$a_1 a_2 + i a_1 a_2 + i a_1 a_2 + \dots + i a_1 a_2 + i a_1 a_2$$

ed osservando come grande di tempo per l'effettiva distribuzione, vedendo d'altronde rispetto al caso quando il valore di a_m è $2m$.

(**) Si può anche l'equazione (4) per x ed avere

una a_m per a_m , mentre quest'ultimo è troppo grande e che indichiamo le formule finali.

Quanto per indicare che anche il metodo di Euler, di cui (la del Calcolo) (10) la stessa cosa produce al sistema di Lagrange

$$m + i + a_m x, y = m + i + a_m x.$$

L'eq. data avendo analizzato, con appoggio diretto in qualche senso $a = \cos(\frac{\pi}{2})$, dal che anche appare il caso del $a^2 = 1$ (1) di y .

142
 Probl. Un gioielliere che possiede mille brilla-
 nti, ciascuno del valore di 18 pa lire, se pro-
 pone il cambio ad un negoziante di perle: que-
 sti lo accetta ed ambire in controcambio quante
 perle possa occorrere, tutte però individualmen-
 te almeno equali 155, e gli offre inoltre la som-
 ma di Scudi 16. Si domanda se il cambio possa
 effettuarsi ed in quale maniera.

Soluz: L'eq. da risolvere è $187x + 253y = 16$

$$\frac{1053}{1878} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3^2} + \frac{1}{2 \cdot 3^3} + \frac{1}{2 \cdot 3^4} + \frac{1}{2 \cdot 3^5} + \frac{1}{2 \cdot 3^6}$$

$a_1=5,4$; $a_2=6,2$; $a_3=5,6$; $a_4=8,0$; $r=8,0$, e perché $(-1)^{k-1}a_k$ si fa $amb-r=175$, valore da cui deducendo $p=2180$: si ha per conseguenza

$$(x = 55 + 17j, y = 187 + 104j) \quad (*)$$

- le schéma ci-dessous illustre, dans un cas simple, comment les données sont traitées :

N.° del brev.	175	Corrip.	1280
	429	n.° della	5.152
	682	parte	6224
	582		6226

Probl. Un gruppo artistico vuol realizzare un disegno di 5000 lire, ed a tale oggetto esibisce al suo pubblico un consistente numero di spettacoli.

(7) In accordance with the above strategy to remove complex terms from the production logic, the following algorithm is proposed to remove the terms from the logic that are not needed for the generation of the logic. The algorithm is as follows: (a) For each term in the logic, check if it is a complex term. (b) If it is a complex term, check if it is a term that is not needed for the generation of the logic. (c) If it is a term that is not needed for the generation of the logic, remove it from the logic. (d) Repeat steps (a) and (b) until no more complex terms are found. (e) The resulting logic is the simplified logic.

14a

di d'argento e d'oro: le prime al prezzo di 195 lire, le seconde di lire 557. Si domanda se il pagamento può costantemente farsi ed in quale misura? Soluz.^{ne} Trattenendo da ciascuno T repesi = 557x+195y=50000 forma lo sviluppo

di $\frac{50000}{557}$ ed ottengo

$$x_1=1, x_2=0, x_3=1, x_4=0, x_5=0, x_6=0, x_7=0, x_8=0, x_9=0, x_{10}=0;$$

quindi $x_1=x_3=x_5=0, x_{10}=7$ e poi

$$x_2=0, x_4=0, x_6=0, x_7=0, x_8=0$$

$$x_9=0, x_{10}=0, x_{11}=0, x_{12}=0, x_{13}=0$$

$$x_{14}=0, x_{15}=0, x_{16}=0, x_{17}=0, x_{18}=0$$

$$x_{19}=0, x_{20}=0, x_{21}=0, x_{22}=0, x_{23}=0$$

$$x_{24}=0, x_{25}=0, x_{26}=0, x_{27}=0, x_{28}=0$$

$$\frac{x_1-1}{557} = \frac{50000-557x_1}{557} = 1,437 \frac{5}{557} x_1 = 0, x_1 = \frac{50000-557x_1}{557} = 11$$

$$x_1=195, x_2=557, x_3=557, x_4=557$$

ed il probl. sommato l'unica soluz.^{ne} $x=5, y=11$.

Il metodo di Lagrange esige anche il problema calcolo di x_1 e di

$$x_2=0, x_3=0, x_4=0, x_5=0, x_6=0, x_7=0, x_8=0, x_9=0, x_{10}=0$$

sistema di cui non può farsi alcuna cosa se prima non si rintraccia il massimo valore di x_1 , per lo che fa d'uopo ricorrere ai limiti

$$1 < \frac{50000}{557} < 1,437 \frac{5}{557}; \quad 0 < \frac{50000}{557} < 1,437 \frac{5}{557},$$

e per mezzo di cui apparso

$$43566-557x_1 < 1,437 \frac{5}{557}; \quad 557 < 1,437 \frac{5}{557} < 11.$$

§ 114. Se il problema dipende da due equazioni fra tre incognite, come

$$ax+by=c, \quad a_1x+b_1y=c_1,$$

si deduce da una, per esempio dalla prima,

$$x=0, y=0, x=0, y=0$$

si sostituisce l'espressione d' x nella seconda e si procede alla soluzione di $a_1b_1-b_1a_2c-a_2a_1$. Trovata $a_1b_1+c_1$, $x=a_1b_1+c_1$, se ne sostituisce

$$x=a_1b_1+c_1$$

§. 115. Sia per esempio

Probl. Trovare un n. intero, che diviso per 2, 3, 5, dia rispettivamente 1, 2, 3, per residuo.

Soluz.^{ne} Chiamando y , z , w i residui rispettivi si ha

$$\begin{cases} y=x-1; & z=x-2; & w=x-3 \end{cases}$$

così $x=y+1$, $x=z+2$, $x=w+3$;

quindi $y-3w=1$, $5z-5w=1$.

Dalla 1.^a $y=3w+1$, $z=5w+1$;

La 2.^a sostituendosi $z=1$ per z diventa $5z-5w=1$ o di $5z-5w=5$, $w=5z-5$.

Daunque

$y=15z+11$, $x=15z+17$, $w=5z-5$, $z=5w+5$,
e perciò i valori d' x si ottengono aggiungendo al minimo suo valore 17 un multiplo di 50,
che è il prodotto dei divisori assegnati 2, 3, 5.
Ciò si verifica in tutti i probl. analoghi.

§. 116. Se i divisori sieno 15, 19, 28, ed i rispettivi residui 4, 2, 10, risulta

$$x=15y+4=19z+2=28w+10,$$

cioè $15y-19z=6$, $19z-28w=8$.

La completa soluzione della 1.^a è compresa nel sistema $y=3z+6$, $w=5z+3$;

L'espressione di w dunque $19z-28w=8$ in $19z-42w=32$, la cui soluzione è

$$z=19a+11, \quad w=42a+2\frac{1}{2} \quad \text{dunque}$$

$x=(15z+4)=15(19a+11)+4=285a+169$, $x=(19z+2)=19(42a+2\frac{1}{2})+2=798a+49\frac{1}{2}$,
dove $798a=169-49\frac{1}{2}$. (*)

(*) Questo risultato si ottiene nell'aritmetica ed E. Goursat (Bull. p. 1) è costretto di supporre (Arith. Page. Two. n. 104. 444.)

Nei casi particolari è sempre preferibile un'elabora-
zione schiava. Così nel probl. del §. 111. si

vede che $\frac{1}{2}(x-2)+\frac{1}{2}(x-3)-\frac{1}{2}(x-1)$

equivale ad un intero, e facendo

$$\frac{1}{2}(x-2)+\frac{1}{2}(x-3)-\frac{1}{2}(x-1)=m$$

subito si ottiene $x=3m+1$ come va.

Se le due eq. fossero fra le stesse incognite
 x, y , qualunque delle forme

$$ax+by=c, a, b, x, b, y, m, c,$$

il probl. potrebbe essere impossibile, perchè la
sostituzione di $bx+e$ per x cambia la a in

a/b , b, y in a, a, y , e se b, b , abbiamo un numero
non divisore intero che deve trovarsi anche in
 c, a, y .

§. 117. Talvolta il n.° dell'eq. è ∞ o ∞ di
quello delle incognite e non esiste il probl. re-
ale indeterminato, perchè tale si suppone il ter-
mine di comparazione in equazione delle eq. di-
te. In questi casi qualche opportuna ipotesi non
è indispensabile.

Probl. Si domandano tre n.° int., che tanto la
somma di tutti quanto quella d'ogni coppia for-
mi un quadrato in num. interi. Soluz.^{ne} Pongeti

$$x+y=a^2, y+z=(b+1)^2, x+z+c=(b+1)^2:$$

la differenza fra la 3.ª e la 1.ª dà $c=2b+1$; que-
sta di $(y+c)-a=(b+1)^2-(a+1)$, cioè $y=a^2-4b$ ed

$$(x+y)-y=a^2-(b^2-4b)$$
 cioè $x=b^2$.

Si determina z la prima che

$x+z=b^2+(b+1)^2=6b+1$ da un quadrato b^2 ,

per lo che basta supporre b un $\frac{b^2-1}{4}$, prendere

$k > 4$, tale che $k^2 = amda$, e si troveranno soddis-
facenti al probl. le ipotesi $da = 5, 7, 11$, etc.

Dalla 1.^a $a=8$ e però $mda, y=5a, a=17$; infatti
 $x+y=mda, x+y=mda, y+y=mda, x+y=mda$.

Dalla 2.^a $da=\frac{m}{2}mda$, e quindi

$mda, y=mda, x=da$; e dati da cui

$$x+y=4da, x+a=11, y+mda=(\frac{m}{2}da)^2$$

$$\text{ed } x+y+a=4da-(a)=4a)^2.$$

§. 118. Quando la proposta è $ax+by+cz=md$
si osservi se le condizioni pel probl. circoscritto
no ciascuna inequale destra costi limiti, e co-
stano di cui si veda un esempio (Sc. del Calc.
T. I. p. 40 e 41.) altrimenti la d sopra proce-
dendosi col reg. artificia. Distribuiti i termini in
gruppi che sia $bx+a$ e $cx+b$, ridotti dalla proposta
l'eq. ipotetica $a(x+y+c)=md$ onde avere

$$x=\frac{1}{a}[d-(b-a)y-(c-a)x] \dots (7)$$

Si come dev'essere $y > 1$ e $x > 1$, il minimo va-
lore di x è $\frac{1}{a}[d-(b-a)-(c-a)]$ onde $\frac{md-(b-a)-c}{a}$.

Sottraendo come sopra l'eq. $c(x+y+a)=md$ si
ottiene $x=\frac{1}{c}[(c-a)x+(c-b)y+d] \dots (8)$

e dato ad x e ad y il minimo valore x si cono-
sce che il minimo di x è $\frac{md+(a-b)-c}{c}$. Sia per esemp.

l'eq. $6x+7y+9z=md$. I limiti di x sono

$\frac{md}{6}, \frac{md}{7}$, cioè $5a, 7a$. Soltanto uno de' $a, 7a$,

$ad, 7a \dots 5a$ si trovi la relazione di cui delle
eq. (7), (8), e qualora risulti si avrà la 3.^a in-
equale della $x+y+az=md$.

Le soluzioni de' problemi di questa natura, sono dunque circoscritte anch' esse dentro certi limiti, talvolta anche assai ristretti, e perciò non sembra che un titolo più ampio di quello d'*indeterminati* possa, come (86) si accennò, in alcun modo lor convenire.

Trattasi della teoria relativa ai problemi semi-determinati de' gradi superiori, teoria molto estesa e difficile, che si pari di quella de' problemi di 1.^o grado, distinguendosi ancora l'*Algebra Italiana*, insigne ormai per tante scoperte fondamentali, che riscontano sì presso nella *Scienza del Calcolo* (33, 143, 164, 513, 535, 536 ec.) e segnatamente per la generale risoluzione di qualsivoglia data equazione astratta. (Op. cit. T. IV, Cap. V.) Chi desidera conoscere questo bellissimo ramo di analisi potrà consultare il Lib. IV. del tomo sopra citato.

LIBRO III.

APPLICAZIONE DELL'ALGEBRA ALLA GEOMETRIA.

TRATTATO DI GEOMETRIA.

CAPITOLO I.

Trigonometria.

TRATTATO DI GEOMETRIA.

ARTICOLO I.

Teoria delle funzioni angolari.

§. 115. **G**li angoli $\overset{\circ}{ACB}$, $\overset{\circ}{ACD}$, $\overset{\circ}{ACE}$ ec. (Fig. 1.) sono il vertice nel centro C di un circolo AEG , e che possono concepirsi per ordine ed immediatamente succedersi da 0° sino a 360° (*); come hanno per misura i rispettivi archi AB , AD , AE ec. tutti fra loro diretti, così insieme su di una rispettiva corda AB , AD , AE ec. propria di ciascuno, e basta determinare il rapporto di ognuno al raggio per avere altrettanti numeri, atti ad esprimere e rappresentare nel calcolo gli angoli corrispondenti. L'idea di tal rapporto è il fondamentale principio della trigonometria, e porta

10

(*) Per averci il comando degli angoli, che non possiedono la specie determinata, servono due dell'altre condizioni del grado, (cioè della Quaresima,) qualunque la divisione dell'angolo sotto la specie gradi, che si esprime per 120° del grado in una misura prima, di questo in altre secondo, ed anche figurando il calcolo. Basta per esempio scrivere semplicemente 2° , equesti per indicare un quadrante, 24° [45 mila 10°] 30° [50 secondi] e le operazioni dell'algebra finiscono così più brevi.

non dipende dalla lunghezza del raggio preso a se (Geom.^a) che prolungando egualmente BC in b , CA in a , la retta ba risulta corda dell'arco ba simile all'arco BA , e per la similitudine dei triangoli CBA , Cba , sia ha: $CB :: BA : Cb$.

Il calcolo delle corde, limitato per altro agli archi equidistanti di stessa grado, e nella infelice ipotesi che il raggio sia di 60 parti, fu adottato dagli antichi Geometri, segnatamente da Ipparco, e nell'*Almagesto* di Tolomeo presentasi una tavola costruita con le suddette limitazioni; ed sembra verisimile che la tavola d'Ipparco, citata da Teone, fosse più estesa di quella proposta dal detto ed instancabile Tolomeo, posteriori all'Ipparco di circa 150 anni.

Oltre la corda AB (Fig. 2.) esiste un'altra linea retta propria di ciascun angolo, ed è la BD , perpendicolare da B sul lato CA , poichè questa coincide (Geom.^a) con la metà della BF , corda dell'arco BAF , doppio dell'arco BA , e non può BCF essere la sua corda BF , senza che la di lei metà BD risulterebbe ad un solo angolo ACB .

La numerica espressione delle corde ha il pregio di costituire esclusivamente quella di tutti gli angoli possibili, mentre il valor numerico delle perpendicolari come BD , sostituite dagli Archi nel IX. secolo, e chiamati seno de' rispettivi angoli, ora tessuti di angoli ottusi, qual è ACB , disingano equivoco, la sola perpendicolare BD risultando seno di ACH e del supplemento BCE ; ma siccome in pratica si sa o può sapere la specie dell'angolo contemplato, l'equivoco spari-

me ed il seno convenga, oltre la sua espressione angolare, una distinta identità per gli angoli del triangolo.

La perpendicolare BD , semicorda dell'angolo alla periferia BEF , è versuto nel trigono inscritto BEF ; la stessa BD in parte del taglio è il seno dell'angolo centrale ACB , e perciò

del suo uguale $B\hat{E}F$: ma gli interi stanno come le loro parti: dunque i seni degli angoli in un trigono rettangolo (sempre inscrittibile al cerchio) stanno come i lati ad essi opposti: (*) Questa semplice relazione, suggerita dall'idea del seno, è la chiave di tutta la trigonometria.

§. 140. Esempio (F. 5) ACE il diametro, C il centro, ACM un quadrante, come BD è il seno di ACB , (e del suppl. BCE) così BF perpendicolare a CM , è il seno del complement-

(*) Tale la stessa se un angolo sia stesso periti BM , metà del lato BE , è seno di ACB e dell'uguale BCE .

Che gli archi archioli convengano BM , ad (F. 5) sono uguali parte della ragione convengano, è una perpendicolare (sempre inscrittibile) nella BE del Lato. 5.° di Euclide, e lo stesso P . Quindi, di cui è noto il seno, si trova, si trova che è costante se poi convengano con tutti questi agli elementi geometrici — eppoi se convengano con tutti questi agli elementi geometrici.

Quanto si ha di un angolo retangolo e si nota la BE . Quindi con la prop. 14 del Lib. 1 dove ha grado in un'angolo è costante qualunque una parte d'angolo.

E' dimostr. con della Geom. che qualunque una distanza (distanza) con la ragione di un angolo θ , con seno di seno, e che seno per seno come il taglio r , dunque

$$\sin \theta r = \sin \frac{\theta}{r}.$$

to $\overset{\Delta}{BCM}$, e dicasi coseno di $\overset{\Delta}{ACB}$, come BD coseno di $\overset{\Delta}{BCM}$.

Definito ad $\overset{\Delta}{ACB}$ l'arco $\overset{\Delta}{AB}(\cos)$ e detto r il raggio BC , perchè $BN=DC$ si ha

$$\cos.^\circ \alpha = \cos.^\circ \text{arco},^\circ$$

La tangente in A , che incontra in T il raggio CB prolungato, qualora si esprima in parti del raggio, divisa la tangente trigonometrica dell'arco $\overset{\Delta}{AB}$, e si ha $AT : DB :: AC : DC$, vale a dire $\tan. \alpha :: r : \cos. \alpha$;

onde $\tan. \alpha = \frac{r \cos. \alpha}{\cos. \alpha}$.

La Mt , tangente in M , dicasi coangente dell'arco α ; CT n'è la secante, Ct la coangente, e si verifica $\sec. \alpha :: r :: r : \cos. \alpha$,

onde $\sec. \alpha = \frac{r}{\cos. \alpha}$.

Le proporzioni $Mt : NB :: CM : CN$,

$Ct : CM :: CB : CN (= BD)$

danno $\cot. \alpha = \frac{r \cos. \alpha}{\cos. \alpha}$, $\csc. \alpha = \frac{r}{\cos. \alpha}$;

per conseguenza $\tan. \alpha = \frac{r}{\cos. \alpha}$. (*)

Il seno, la tang., la secante ed il seno-vero $\overset{\Delta}{AD}$, le diciamo *funzioni angolari*; se il raggio si suppone $\cos$, come per brevità avanti nel testo, equivalgono a numeri decimali indefiniti; risultano espressioni con numeri interi quando, per tornare agli usi logaritmicì, si concepisce il raggio diviso in 10 mila milioni di parti, (ipot. a

(*) Abbiamo dato le definizioni nella Figura perchè, in generale, coseno coseno ed allungamento di seno seno seno seno seno.

ed) corrispondente $L=0$) poiché non avrà seno, tangente ecc., che non ne contenga parecchie.

§. 122. Notisi che il seno nasce con l'arco in A e sparisce dopo a $CM(=r)$ in M , per desinere in seguito sino a cessare in E ; punto oltre il quale rimane per riprendere gli stessi valori, ma negativi, nella semicirconferenza inferiore sino ad annullarsi in A , convenientemente all'equazione sen.^a $\cos$.^a $\cos$.^a $\cos$.^a che dà

sen. $\cos$.^a $\sqrt{r^2 - \cos.^2 \alpha}$; e si vede che il valore uguale, di segno contrario, altro non può essere che DP , seno dell'arco negativo $AP=AB$. Qualunque sia l'arco α di la sen. $(r-\alpha)r = \sin.\alpha$. Il coseno, siccome seno anch'esso, sta pure tra i limiti r e $-r$, ma perchè appartiene ad un arco complementare, nasce $-r$ in A per diminuire verso M , riducendosi a CD in B , e CQ in P ec. sino a cessare in M , giacchè l'arco AM non diventa complementare. Passato il punto M , il coseno diventa; per un arco qualunque $AMB=AM$, il cui seno sia α , seno è $CQ(=\cos)$, ma progredisce in una direzione contraria alla CD e s'indica col segno $-$. Tal modificazione vien suggerita dalla formula

cos. $\cos$.^a $\sqrt{r^2 - \sin.^2 \alpha}$, e si spiega osservando che il complementare dell'arco AMB , è quell'arco che gli si dee togliere per ridurlo a 90° , cioè l'arco AM preso negativamente.

Quanto più il punto si scende verso E tanto più la CE negativa si avvicina finchè coincide con CE ($=-r$). Al di là, in p per esempio, il coseno, fattosi negativo, diminuisce e diventa CQ , finchè giunto a in M' , fuori del 3.^o quadrante, si annulla di nuovo per riprendere positivamente la segita, e diventa

§. 122. Se si condurre ad' (F, P, Q) perpendicolare a lato A in a' , la proporzione tra i lati ed i seni degli angoli opposti (§119) sarà identica

$$a'b : C :: \text{sen. } a'ab (= \text{sen. } b) : \text{sen. } 90^\circ$$

cioè $a'b \text{ sen. } C :: \text{sen. } b : r$; così $a'c = B \text{ sen. } C : r$; e quindi

$$rA [= (a'b + a'c)] = C \text{ sen. } b + B \text{ sen. } C;$$

e perché A, B, C sono lati qualunque, mutando il sistema

$$[rA = C \text{ sen. } b + B \text{ sen. } C; rB = A \text{ sen. } C + C \text{ sen. } a;$$

$$rC = A \text{ sen. } b + B \text{ sen. } a] \dots (a) \text{ e significa:}$$

Tale. Che un lato equale alla somma degli altri moltiplicati pel seno dell'angolo che stanno fu col primitivo: tenendo che ha il pregio di estendersi a qualunque poligono, e che spontaneamente porta l'interessante equazione di $\text{sen. } (a+b)$. (*)

§. 123. La proporzione de' lati co' seni di $\{A \text{ sen. } b = B \text{ sen. } a, \text{ sen. } a = C \text{ sen. } b, B \text{ sen. } C = C \text{ sen. } b\}$, (§) formula che dispone

$$[A \text{ sen. } b = B, A \text{ sen. } C = C, B = \frac{C \text{ sen. } b}{\text{sen. } C} = C \text{ tan. } b]$$

quando $a = 90^\circ$.

$$\text{Dunque } A = \frac{C \text{ sen. } a}{\text{sen. } C} = \frac{C \text{ sen. } a}{\text{sen. } (a+b)}, B = \frac{C \text{ sen. } b}{\text{sen. } C} = \frac{C \text{ sen. } b}{\text{sen. } (a+b)}$$

e sostituendo in $C = A \text{ sen. } b + B \text{ sen. } a$ (§. antec.), fatta la moltiplicazione per $\frac{\text{sen. } (a+b)}{C}$, si ottiene

$$r \text{ sen. } (a+b) = \text{sen. } a \text{ sen. } b + \text{sen. } b \text{ sen. } a,$$

(*) Del seguito del libro si può dire di parlare di tale $\text{sen. } (a+b)$ calcolando come sopra del $\text{sen. } a$ e sostituendo $-\text{sen. } a$ in seno

di $\text{sen. } a'$ il risultato è il solito $rA = C \text{ sen. } b + B \text{ sen. } a$

ed

e basta concludere che $\sin -\theta = -\sin \theta$ e però $\cos \theta = \cos -\theta$, θ per avere

$\sin \theta = (\sin \theta) \cos 0$, $\cos \theta = (\cos \theta) \sin 0$, θ con $\theta = 0$ (c) dove uno degli archi può essere $\pm \pi/2$, perché i triangoli (a), (b) da cui è dedotta, si riferiscono anche al triangolo avente un angolo retto.

Fatto $(F = E)$ se $AMN = \{a+b, \cos a, \sin a\}$ (dove $\cos a = \frac{b}{c}$, $\sin a = \frac{a}{c}$), si ha con $AME = \{a, \sin a, \cos a\}$ ed $Ea = a$ (c'). Dunque $\sin \{(\frac{1}{2}a+b) - (\frac{1}{2}a+b)\} = \sin (a+b)$ e perciò la formula (c) adattandosi anche all'ipotesi $\pm \pi/2$ e $\pm \pi$.

§ 104. Dalla suddetta formula si deduce $\sin (a+b) \cos a = \sin a \cos a$ con $a = 0$, e

$$\sin (a+b) + \sin (a-b) = \frac{2}{c} \sin a \cos b, \quad (d)$$

$$\sin (a+b) - \sin (a-b) = \frac{2}{c} \sin b \cos a. \quad (e)$$

Sia $a+b = \alpha$, $a-b = \beta$, e siccome ne risulta

$$a = \frac{1}{2}(\alpha + \beta), \quad b = \frac{1}{2}(\alpha - \beta),$$

$$\sin a + \sin \beta = \frac{2}{c} \sin \frac{1}{2}(\alpha + \beta) \cos \frac{1}{2}(\alpha - \beta) \quad (f)$$

$$\sin a - \sin \beta = \frac{2}{c} \sin \frac{1}{2}(\alpha - \beta) \cos \frac{1}{2}(\alpha + \beta). \quad (g)$$

Dalla a. e. sottraendo a per a , $a\beta$ per β , e per c , si trova

$$\begin{aligned} \cos (a+\beta) & \left(= \frac{1}{c} \frac{\sin a \cos a - \sin a \cos \beta}{\sin (a-\beta)} \right) \\ & = \frac{\sin a \cos a - \sin \beta \cos \beta}{\sin a \cos \beta - \sin \beta \cos a} \end{aligned}$$

Ma fatta $\sin a = A, \cos a = B, \sin \beta = C, \cos \beta = D$, è

(c') Per la proprietà che il quadrato del seno doppio, con seno di raddoppio uguale al doppio, con ad M , può essere scritto il punto in distanza F unita dall'origine, il punto A naturalmente si trova in E .

$$\frac{(AD-BC)(BD-AC)}{AB(C^2+D^2)} = \frac{AB(C^2+D^2)}{AB(CD+A^2+B^2)} = \frac{AB-CD}{AB-CD},$$

perchè $\frac{AB-CD}{AB-BC} = BD-AC$, cioè

$$\frac{\cos. a \cos. a - \cos. \beta \cos. \beta}{\cos. a \cos. \beta - \cos. \beta \cos. a} = \frac{\cos. a \cos. \beta - \cos. a \cos. \beta}{\cos. a \cos. \beta - \cos. a \cos. \beta}$$

ed "il 1." membro si è trovato $\cos. (a+\beta)$;

dunque, posto a per $a + b$ per β , si ha

$$\cos. (a+b) = \cos. a \cos. b - \sin. a \sin. b$$

e quando invece,

$$\cos. (a-b) = \cos. a \cos. b + \sin. a \sin. b \quad (*)$$

haonde $\cos. (a+b) = \cos. a \cos. b - \sin. a \sin. b$ e $\cos. (a-b) = \cos. a \cos. b + \sin. a \sin. b$ anche nell'ipotesi che gli angoli a , b non s'anno-
ni, perchè il coseno non differisce dal seno che per un estremo rapporto.

§. 125. Fatto $b=0$ si ha $\cos. (a+0)$ cioè

$$\cos. a = \cos. a \cos. 0 - \sin. a \sin. 0,$$

e perchè $\cos. 0 = \cos. 0 \cos. 0 + \sin. 0 \sin. 0$, si può dedurre

$$\cos. a \cos. 0 = \cos. a \cos. 0 + \sin. a \sin. 0 \quad (1)$$

$$\cos. (a+b) + \cos. (a-b) = \frac{2}{1} \cos. a \cos. b \dots (2)$$

$$\cos. (a-b) + \cos. (a+b) = \frac{2}{1} \cos. a \sin. b \dots (3)$$

e qualora pongasi come nel §. ant. $a+b=\alpha$, $a-b=\beta$,

$$\cos. a + \cos. \beta = \frac{2}{1} \cos. \frac{1}{2}(\alpha+\beta) \cos. \frac{1}{2}(\alpha-\beta) \dots (4)$$

$$\cos. \beta - \cos. a = \frac{2}{1} \sin. \frac{1}{2}(\alpha+\beta) \sin. \frac{1}{2}(\alpha-\beta) \dots (5)$$

Le due prop. e le (f), (g), quadi tutto im-
plicitamente comprendono ciò che rimane d' in-
teressante nella teoria delle funzioni angolari.

§. 126. Per avere $\tan. (a+b)$ si trasformi $\tan.$

(*) Il segno dell'arco negativo AB ($\gamma > 1$) è AB , per conven-
zione positiva; sarebbe negativo AB , quando l'arco AB ,
non si è tolto che può procedersi dagli archi maggiori del
quadrante.

in $r \frac{\sin.}{\cos.}$, scrivasi $\tan. (a+b) = r \frac{\sin. a \cos. b + \sin. b \cos. a}{\cos. a \cos. b - \sin. a \sin. b}$,
e di riva ciascuna termine per $\cos. a \cos. b$, si ottiene

$$\tan. (a+b) = \frac{r^2 (\tan. a + \tan. b)}{r^2 - \tan. a \tan. b} \dots \dots (6);$$

e perchè AT ($F: B$) ossia $\tan. -b = -\tan. b$,

$$\tan. (a-b) = \frac{r^2 (\tan. a - \tan. b)}{r^2 + \tan. a \tan. b} \dots \dots (7)$$

Daque-1.^a $\tan. (a+a)$ ossia $\tan. 2a = \frac{2r^2 \tan. a}{r^2 - \tan. a^2}$.

2.^a $\tan. (a+ga'') = a' \frac{r^2}{\tan. a}$ perchè $\tan. a$ sparisce

in confronto di $\tan. ga'' = a$, e lo stesso avviene di r^2 in confronto di $a \tan. a$.

3.^a Se $r^2 = \tan. a \tan. b = 0$, cioè $\tan. a = \frac{r^2}{\tan. b}$, il che significa essere $\tan. a$, $\tan. b$ in ragione inversa è reciproca (60) è $\tan. (a+b) = \infty$ e però $a+b=ga''$. Viceversa se $a+b=ga''$, siccome $\tan. a$, $\tan. b$, spartansi per ipotesi nel zero, ciascun de' quali è $=ga''$, sono numeri finiti, ed il valore di una frazione $\frac{a}{b}$ non può risultare $=\infty$ che per l'infinito valore di A o per l'indeterminazione di B (§. cit.), bisogna che sia $r^2 = \tan. a \tan. b = 0$, cioè che $\tan. a$, $\tan. b$ stiano fra loro in ragione reciproca.

4.^a Quando $r^2 = \tan. a \tan. b$ sono gli archi a, b differenzia di ga'' . Di fatto, in questa sola ipotesi si verifica (2.^a 3.^a) $\tan. b = \frac{r^2}{\tan. a}$.

§. 107. Dalle (6) (125) si ricava

$$\sin. a = \sqrt{\frac{r}{r - \cos. 2a}}, \quad \cos. a = \sqrt{\frac{r}{r + \cos. 2a}}$$

Quindi $\tan. a = \frac{\sqrt{r-\cos. a}}{\sqrt{r+\cos. a}}$, e moltiplicando sotto

e sopra per $r+\cos. a$, perchè

$(r-\cos.) (r+\cos.) = r^2 - \cos.^2 = \sin.^2$, si ottiene

$\tan. a = \frac{r-\cos. a}{\sin. a}$ ed anche $\tan. a = \frac{r+\cos. a}{\sin. a}$.

Basta osservare che riducendo al medesimo denominatore si trovano i numeratori eguali tra loro.

Il quoziente delle (f) , (g) , (m) , (n) , divise l'una per l'altra, è notabile: si ha per es.

$$\frac{\sin. a + \sin. \beta}{\sin. a - \sin. \beta} = \frac{\tan. \frac{1}{2}(a+\beta)}{\tan. \frac{1}{2}(a-\beta)} \dots (g)$$

Così $(f) : (n) = \tan. \frac{1}{2}(a+\beta) : \tan. \frac{1}{2}(a-\beta)$ ec.

Sono per dritto d'osservazione le due seguenti :

$$\left. \begin{aligned} \tan. a + \tan. b &= \frac{r^2 \sin. (a+b)}{\cos. a \cos. b} \\ \tan. a - \tan. b &= \frac{r^2 \sin. (a-b)}{\cos. a \cos. b} \end{aligned} \right\} \dots (i)$$

§. 1.º. Facendo in (f) ed in (g) , $a+m=\beta$,

$$\beta = (m-s)a + s(a-m),$$

simboli, che atteso le indeterminazioni a, b, m , rappresentano due archi qualunque, si osservano le seguenti, dedotte nell'introd. al Calcolo, dell'Eulero,

$$\begin{aligned} \cos. (ma + sb) &= \cos. m \cos. \left\{ (m-s)a + s(a-m) \right\} + \sin. \left\{ (m-s)a + s(a-m) \right\} \sin. m \\ \cos. (ma - sb) &= \cos. m \cos. \left\{ (m-s)a - s(a-m) \right\} - \sin. \left\{ (m-s)a - s(a-m) \right\} \sin. m \end{aligned} \dots (j)$$

che, posto $b=a$ si convergono in

$$\begin{aligned} r \cos. ma - r \cos. a \cos. (m-s)a &= \cos. (m-s)a \\ r \cos. mb - r \cos. a \cos. (m-s)a &= -\cos. (m-s)a \end{aligned} \dots (k)$$

e servono alla costruzione delle tavole trigonometriche, come pure alla moltiplice azione de-

gli archi, e spicciatamente presentano l'inscrizione dei poligoni regolari.

Per trovare un arco x si fa $\cos x$, e indicato con bc per A , $\sin x$ per x , l'ipotesi $\cos 3x$ nella 1.^a della formola (7), posta più comodamente, dà $A \cos 3x - 3 \cos x + 4 \cos x = 4 \cos x (1 - \cos^2 x) - \cos x$, cioè $4x^3 - 3x + A \cos x = 0$ (1) equazione, che sostituito lo corde al seni, per lo che si fa $x = \frac{1}{2} \cos \cos. ad) = \frac{1}{2} p, A = \frac{1}{2} \cos. 6a) = \frac{1}{2} B$, riducesi ad $y^3 - 3y + B = 0$.

Quando si tratta d'inscrivere un poligono regolare, l'arco $(m+1)a$ compie la circonferenza, è $\cos. (m+1)a$ e la 1.^a delle (7), sostituito $\frac{1}{2} p$ in vece di $\cos. x$ ($\cos x$), dà per $m=1, 2, 3, 4, 5, 6$, le seguenti

$$y^3 - 3 \cos a, y^3 - 3 \cos a, y^3 - 5y^2 + 5 \cos a, y^3 - 4y^2 + 5 \cos a, \\ y^3 - 3y^2 y^2 + 4y^2 - 7 = 0 \quad (2)$$

Posteggiando l'equaz. (1) posta sotto la forma $x^3 - 3x^2 x + 4x^2 A \cos x$ (14 § 2.^a I) con $x^2 - px + q = 0$ si ottiene $r = \sqrt[3]{\frac{1}{2} p}$, $A = \frac{3}{2} q \cdot p$, e descritte il cerchio col raggio $\sqrt[3]{\frac{1}{2} p}$, se l'arco di cui seno è in seno $= \frac{3}{2} q \cdot p$ fuori $= 3a$, si hanno i valori d' x espressi per

$\cos. x, \cos. (6a - x), \cos. (6a + x)$ (15)
valori tali perchè il raggio $\sqrt[3]{\frac{1}{2} p}$ dovendo superare il seno $\frac{3}{2} q \cdot p$ risulta

$$\frac{4}{3} p > \frac{9q^2}{p^2} \text{ o sia } \frac{4}{27} p^3 > \frac{9}{4} q^2$$

e d'altronde si è supposto $p < \cos. 6a$ (16)

(1) Veggasi una breve esposizione nel libro del Caputo.

(2) In ragione di ciò che gli archi derivati dal seno A sono seno per seno, così $3a, 7a, 11a, 15a, 19a, 23a$.

I prec. valori si adattano al raggio delle tavole di cui raggio R mediante la proporzione
 $r:R::A:\text{sen. } 36^\circ$ d'onde ,

$$\text{sen. } 36^\circ \left(= \frac{R \cdot A}{r} = \frac{R \cdot 36^\circ p}{rV'p} \right) = \frac{36^\circ R}{rV'p}$$

Avendosi per es.^o $x^2 - 3x + 1 = 0$ si trova
 $\text{sen. } 36^\circ = \frac{1}{2}R =$, $36^\circ = 36^\circ$, e per ricavare dalle ta-
 vole i valori d' x s'istituisce la proporzione
 $R:x::\text{sen. } 36^\circ: x$, che dà

$$x = \frac{1}{2}V'p, \text{ sen. } 36^\circ, R = \frac{1}{2} \text{ sen. } 36^\circ \text{ cos. } 36^\circ \text{ sen. } 36^\circ;$$

$$x = \frac{1}{2} \text{ sen. } 36^\circ = 1,550888, x = -\frac{1}{2} \text{ sen. } 72^\circ = -1,871785.$$

° §. 109. Si ha $(\text{cos. } a + \text{sen. } aV'-1)^2 =$
 $\text{cos.}^2 a - \text{sen.}^2 a + 2 \text{ sen. } a \text{ cos. } aV'-1 = (\text{cos.}^2 a + 1) +$
 $\text{cos. } 2a - \text{sen. } 2aV'-1$, e moltiplicando per
 $\text{cos. } a + \text{sen. } aV'-1$ l'uno e l'altro membro della prece-
 dente equazione, ottenesi cos. $a \text{ cos. } a - \text{sen. } a \text{ sen. } a +$
 $(\text{cos. } a \text{ cos. } 2a + \text{cos. } 2a \text{ sen. } a) V'-1 \text{ cos.}$
 $\text{sen. } (2a-2a) + \text{sen. } (2a-2a) V'-1 =$
 $\text{cos. } 3a + \text{sen. } 3aV'-1$.

Si trova del tutto simile l'espressione di
 $(\text{cos. } a + \text{sen. } aV'-1)^2, (\text{cos. } a + \text{sen. } aV'-1)^3$, ec.
 e per assicurarci se la forma del rischiarato
 sia generale, basta supporre ottenuta la riduzione
 $\text{cos. } a + \text{sen. } aV'-1)^p = \text{cos. } pa + \text{sen. } paV'-1$
 dove p è un determinato num.^o qualunque, e
 moltiplicare ambedue i membri per
 $\text{cos. } a + \text{sen. } aV'-1$ poiché si ritrae

$$(\text{cos. } a + \text{sen. } aV'-1)^{p+1} = \text{cos. } pa \text{ cos. } a +$$

$$\text{sen. } pa \text{ sen. } a + (\text{sen. } a \text{ cos. } pa + \text{cos. } a \text{ sen. } pa) V'-1$$

$$= \text{cos. } (a+pa) + \text{sen. } (a+pa) V'-1 =$$

$$\text{cos. } (p+1)a + \text{sen. } (p+1)aV'-1$$

$$\text{cioè } (\text{cos. } a + \text{sen. } aV'-1)^{p+1} =$$

$$\text{cos. } (p+1)a + \text{sen. } (p+1)aV'-1,$$

Si che dimostra non potere esser vera l'equat.
 $(\cos. a + \sin. a\sqrt{-1})^n = \cos. na + \sin. na\sqrt{-1} \dots (a)$
 nell'ipot. di $n = p + 1$ determinata, stante che ta-
 le ella sia nell'ipot. di $n = p + 1$; e siccome la stessa
 derivazione è applicabile a $(\cos. a + \sin. a\sqrt{-1})^{p+1}$
 e così via, ne segue che l'equazione (a) sia vera
 per n qualunque; e la stessa argomenta dimo-
 stra viene.

$$(\cos. a + \sin. a\sqrt{-1})^p = \cos. na + \sin. na\sqrt{-1}.$$

Se si collega il 1.^o membro dell'equazione (a)
 e si eguagli la somma de' termini immaginari
 a $\sin. na\sqrt{-1}$ si ottiene l'equazione

$$\cos. na + \frac{n}{1} \sin. a \cos. a^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2 \times 2} \sin. a^2 \cos. a^{n-2} + \dots$$

che, fatto $\cos. na = A$ e $\sin. na = X$, adottati agli
 usi della 1.^a formula (D) (§. 150.)

* §. 150. Se il seno può esprimersi con una fun-
 zione algebrica dell'arco, dev'essere

$$\sin. a = a + p_1 a^3 + p_2 a^5 + p_3 a^7 + \dots + p_{n-1} a^{2n-1} \dots (a)$$

perchè $\cos. a$ differisce nel segno, non nel va-
 lore, (121), da $\sin. a$, ed $a + p_1 a^3 + p_2 a^5 + \dots$ non
 può coincidere con $-a + p_1 a^3 - p_2 a^5 + \dots$

Ed altronde l'espressione (a) dev'esser vera a
 qualunque valore di a , e perciò ad $a=0$, che
 fa evanire il 1.^o membro; dunque alcun termi-
 ne può essere indipendente dall'arco a : si esclu-
 de ogni esponente negativo, perchè

$$p_k a^{-k} = p_{k+1} \frac{1}{a} \text{ diviene infinito quando } a=0;$$

il coefficiente del 1.^o termine si è fatto ∞ per-
 chè il seno tanto meno differisce dall'arco quan-
 to più questi diminuiscono, e la dimostrazione re-
 stando arbitraria, dev'essere un punto in cui

Faremo poi il seno oloediano (a) , circonscritto in-comparabile con l'equazione sen. $a \cos a - p_1 a^2$ ec.

Per rapporto a $\cos a$ giova considerare

$$\cos. a \cos a - p_1 a^2 + p_2 a^4 - p_3 a^6 + \dots + p_{2n} a^{2n} \quad (5)$$

perchè quando a vanisce è costante, e perchè $\cos a$ non può coinciderci come due (124 Nota) nel valore e nel segno con $\cos a$, se si supponessero nello sviluppo le potenze dispari di a . Si procede dagli archi maggiori del quadrante, che indichiamo per a in $p + b$, perchè in tal caso b con $a = \text{sen. } b$, e si fa uso dello sviluppo del seno.

Così pure si sostituisce in

$$\cos. (a+b) + \cos. (a-b) = 2 \cos. a \cos. b \quad (125)$$

l'espressione (5) per $\cos. a$, e l'analogo per $\cos. b$, $\cos. (a+b)$, $\cos. (a-b)$; divisi per 2, e soppressi da ambe le parti la serie (5) si avrà

$$\left. \begin{aligned} p_1 b^2 + 2p_2 b^2 a^2 + 4p_3 b^2 a^4 + 8p_4 b^2 a^6 + \dots + 2(n-1)p_{2n} b^2 a^{2n-2} \\ + \quad p_1 b^4 + 2p_2 p_1 b^4 a^2 + 7p_3 p_1 b^4 a^4 + \dots \\ \quad + \quad p_2 b^6 + \dots \dots \dots \\ \dots \dots \dots \\ \left\{ \begin{aligned} p_1 b^2 + p_2^2 b^2 a^2 + p_1 p_2 b^2 a^4 + p_1 p_2 b^2 a^6 + \dots + p_1 p_{2n-2} b^2 a^{2n-2} \\ + \quad p_1 b^4 + p_1 p_2 b^4 a^2 + p_1^2 b^4 a^4 + p_1 p_{2n-2} b^4 a^{2n-2} \\ \quad + \quad p_2 b^6 + \dots \dots \dots \\ \quad \dots \dots \dots \end{aligned} \right. \end{aligned} \right\}$$

(*) Si sa dalla medesima Geometria (e si vede dall'che se non si assume può facilmente vedersi) che il lato del poligono regolare di 12800 lati, non essendo, l'angolo corrispondente al vertice, non si può del raggio e non 12800 lati, e non 12800 lati; in verità per conseguenza dell'esse meno di una sola parte del raggio stesso in un solo vertice, così meno di quella parte sempre quantita trascurabile, perchè il raggio si può comunque diminuire, ed il numero dei lati del poligono, per questo si vuole assumere.

alla

Il confronto di due linee corrispondenti, per es.^a delle due prime, nell'uno e nell'altro membro, dà

$$p_n^2 = 6p^2, p_n p_{n-1} = 16p_n, p_n p_{n-2} = 8p_n, \dots$$

$p_n p_{n-3} = (n-1)(n-3)p_{n-3}, p_n p_{n-4} = (n-1)p_{n-4}$ dove i coefficienti numerici dei secondi membri sono i numeri angolari (76): si ha per conseguenza

$$p_n = \frac{n^2 p_n^2}{2 \cdot 3 \cdot 4} = p_n \left(\frac{p_n^2}{2 \cdot 3 \cdot 4} = \frac{3^2 p_n^2}{2 \cdot 3 \cdot 4} \right) = \frac{n^2 p_n^2}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}$$

$$p_n \left(\frac{p_n^2}{4 \cdot 5} = \frac{10 p_n^2}{3 \cdot 6} \right) = \frac{n^2 p_n^2}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = p_n = \frac{n^2 p_n^2}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}$$

Ma s'è dubbia che dal partito confronto risultasse derivare possa qualcosa, perchè qualunque termine della linea m -esima nel n -esimo membro (partendo dal n -esimo di ogni linea che coincide col n -esimo della linea corrispondente nell'altro membro) vien' espresso per

$$\frac{(m+1) \dots (m+n-1)(m+n)}{2 \cdot 3 \dots n} p_{m+n} a^m a^n,$$

mentre qualunque termine del n -esimo ha per simbolo

$$p_n a^n b^n a^n \text{ e l'equazione } p_n a^n = \frac{(m+1) \dots (m+n)}{2 \cdot 3 \dots n} p_{m+n}$$

risulta dalle formole sopra ottenute generalmente verificata.

Dalla sostituzione delle serie (x), (x) lo con $(a-b) = \cos, (a+b) = \sin, a$ con b (§. cit.) nasce

$$\left. \begin{aligned} & 16 p_n a^n + 16 p_n b^n + 16 p_n a^n + 16 p_n b^n + 16 p_n a^n + 16 p_n b^n \\ & + 16 p_n a^n + 16 p_n b^n + 16 p_n a^n + 16 p_n b^n + \dots \\ & + 16 p_n a^n + 16 p_n b^n + \dots \end{aligned} \right\} =$$

$$\left\{ \begin{aligned} & a + p_1 b x^3 + p_2 b x^5 + \dots + p_{m-1} b x^{2m-1} \\ & + p_2 b^3 a + p_3^2 b^3 a^3 + \dots + p_2 p_{m-1} b^3 a^{m-1} \\ & + p_3 b^5 a + \dots \\ & \dots \end{aligned} \right.$$

e basta paragonare i termini simili delle due prime linee per avere

$$ap_{m-1} - a_2 p_2 = -4p_{m-1} p_2 + 6p_{m-1} - p_{m-1}^{m-1} - a_2 p_{m-1} \text{ cioè}$$

$$p_{m-1} = \frac{1}{2} p_2 \left[-\frac{a^4 p_2^2}{a \cdot 3 \cdot 4} - \frac{a^4}{a \cdot 3 \cdot 4} (-1)^2 \right] = -\frac{1}{2} \frac{1}{3};$$

$$p_2 \left[-\frac{6 a^4 p_2^2}{a \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} - \frac{6 a^4}{a \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} (-1)^2 \right] = -\frac{2}{a \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5};$$

$$p_{m-1} \left[-\frac{a a^2 p_2^m}{a \cdot 3 \cdot 4 \cdot 2a} - \frac{a^m}{a \cdot 3 \cdot 4 (2a-1)} (-1)^m \right] = -\frac{1}{a \cdot 3 \cdot 4 \cdot (2a-1)}$$

dove il segno superiore si riferisce ad a dispari.

Quindi

$$\text{con } a=3: \frac{a^3}{a \cdot 3} + \frac{a^5}{a \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} + \frac{a^7}{a \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7} + \dots + \frac{a^{2m-1}}{a \cdot 3 \cdot 4 \cdot (2a-1)} = (c)$$

$$\text{con } a=4: \frac{a^3}{a} + \frac{a^5}{a \cdot 3 \cdot 4} + \frac{a^7}{a \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} + \dots + \frac{a^{2m}}{a \cdot 3 \cdot 4 \cdot 2a} = (c')$$

espressioni, che brevemente, non facilità e con rigore, e senza il soccorso dell'infinito, vengono così dedotte dalle (c), (c'), vale a dire, dal lemma del §. 112.

° §. 121. Siccome la tangente meglio segue e non viene quando si avvicina $-a$ per a , ed un arco infinitamente piccolo si confonde con la sua tangente, che essendo con esso, si può supporre

$$\text{con } a=0: a + p_1 a^3 + p_2 a^5 + \dots + p_{m-1} a^{2m-1};$$

$$\text{Quindi } a + p_1 a^3 + p_2 a^5 + \dots = \frac{\frac{a^3}{a \cdot 3} + \frac{a^5}{a \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} + \dots}{1 + \frac{a^2}{a \cdot 3 \cdot 4}} \text{ con } a$$

$$\left. \begin{aligned} & \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{2 \cdot 4} - \frac{x^6}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} + \dots - \frac{x^{2m+2}}{2 \cdot 3 \cdot 4 \dots 2m+2} \\ & + x_2 x^2 - \frac{1}{2} x_1^2 x^4 + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} x_2^2 x^6 + \dots + \frac{1}{2 \cdot 3 \dots (2m+2)} x_1^{2m+2} \\ & + x_2 x^2 - \frac{1}{2} x_1^2 x^4 - \dots - \frac{1}{2 \cdot 3 \dots (2m+2)} x_1^{2m+2} \\ & + x_1 x^2 - \dots - \frac{1}{2 \cdot 3 \dots (2m+2)} x_1^{2m+2} \\ & \dots \dots \dots \end{aligned} \right\} = -\frac{x^2}{2} - \frac{x^{2m+2}}{2 \cdot 3 \dots (2m+2)}$$

$$x_2 = \frac{1}{2} \cdot x_1 = \frac{1}{2} x_1 \quad \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} - \frac{1}{2 \cdot 3}$$

$$x_1 = \frac{1}{2} x_2 = \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} x_2 + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} - \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7} - \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}$$

$$x_{m+1} = \frac{1}{2} x_m - \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} x_{m-1} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} x_{m-2} - \dots$$

$$= \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4 \dots (2m+2)} - \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4 \dots (2m+2)} = 0$$

$$\text{Logo: } \tan a = a + \frac{a^3}{3} + \frac{a^5}{5} + \frac{a^7}{7} + \frac{a^9}{9} + \dots = (x)$$

* §. 132. Viceversa, può l'arco esprimersi per la potenza di una funzione angolare. La serie (x) dà (§5. Ex.°)

$$a = \tan a = \frac{\tan^3 a}{3} + \frac{3 \tan^5 a}{5} + \frac{3 \cdot 5 \tan^7 a}{7} + \frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \tan^9 a}{9} + \dots$$

Sia $a x = t + r x^3 + r x^5$ ecc. dove $t = \tan a$, e perchè $\tan a = \frac{a t}{1-t^2}$ (§5. n.° 1.°) si avrà

$$a t = \frac{a t}{1-t^2} + \frac{3 r x^3}{(1-t^2)^2} + \frac{3 r x^5}{(1-t^2)^2} + \dots$$

ma $a x$ è algebr. $\frac{a t}{1-t^2} + r x^3 + r x^5$ ecc.; dunque, svolgendo $\frac{t-t^3}{1-t^2} + \frac{1}{1-t^2} x$, ecc. e dividendo per a ,

$$1+r_2x^2+r_3x^3+\dots+r_{m-1}x^{m-1}+x^{m+1}\left|\begin{array}{c} x^{m+1} \\ +\frac{1}{2}x^2 \\ +\frac{1}{2}x^3 \\ +\frac{1}{2}x^4 \end{array}\right| x^2 \dots$$

d'onde $r_2=-\frac{1}{2}$, $r_3=\frac{1}{2}$, $r_4=-\frac{1}{2}$ ec.; perciò

$$g(x)=\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x^3-\frac{1}{2}x^4+\dots=\frac{1}{2}x^{m-1}x+\dots \quad (7)$$

e se $a=\frac{1}{2}x$, $\frac{1}{2}x=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}$ ec.

* §. 155. Faciasi ora la

$$a^x=1+xf.a+\frac{x^2}{2}.a^2 \text{ ec. (55), pongasi}$$

$x\sqrt{-1}$, indi $-x\sqrt{-1}$ per x , e sommando, poi sottraendo, si avrà

$$e^{x\sqrt{-1}}+e^{-x\sqrt{-1}}=2\left(1-\frac{x^2}{2}.a^2+\frac{x^4}{2.4}.a^4 \text{ ec.}\right)=2 \cos. x,$$

$$e^{x\sqrt{-1}}-e^{-x\sqrt{-1}}=2x\sqrt{-1}\left(x-\frac{x^3}{3}.a^3+\frac{x^5}{5.4}.a^5 \text{ ec.}\right)=2\sin.x\sqrt{-1}$$

$$\text{cioè } \cos. x=\frac{1}{2}\left\{e^{x\sqrt{-1}}+e^{-x\sqrt{-1}}\right\},$$

$$\sin. x=\frac{1}{2}\sqrt{-1}\left\{e^{x\sqrt{-1}}-e^{-x\sqrt{-1}}\right\};$$

formule la cui somma e la differenza è

$$e^{\pm x\sqrt{-1}}=\cos. x \pm \sin. x\sqrt{-1}.$$

Basta dividere sotto e sopra per $\cos. x$ il quoziente della 1.^a per la 2.^a, cioè

$$\frac{\cos. x+\sin. x\sqrt{-1}}{\cos. x-\sin. x\sqrt{-1}} \text{ per ottenere } e^{x\sqrt{-1}}=\frac{1+\tan. x\sqrt{-1}}{1-\tan. x\sqrt{-1}}.$$

§. 156. I metodi per la costruzione delle tavole de' seni, coseni e tangenti in parti del raggio, sono al presente oggetti di arduissime, e siccome non sono convenienti all'uso di un

elemento li tralasciamo: ci basta soltanto di avvertire i giovani che le soluzioni trigonometriche, le quali formavano il soggetto del seg. Cap. saranno approssimative, perchè le funzioni angolari che vi s'impiegheranno con elementi del calcolo, vengono determinate mediante una serie di successivi valori approssimanti, l'incertezza dei quali si crescebbe nell'ultimo, che per altro, sotto le costruzioni usate degli analisti nelle costruzioni delle tavole, non sburra del vero che di una quantità estremamente piccola, e tale, che guasta non diminuirebbe l'effettiva identità del risultato.

ARTICOLO II.

Relazione de' trigoni simili e sue applicazioni teorico-pratiche.

§. 135. Le combinazioni teoriche tra sei elementi di un trigono, cioè $\left(\frac{a, b, c}{A, B, C}\right)$ essendo 20, non meno di 19, esclusa la terza degli angoli che costituisce la somiglianza non l'identità de' trigoni, sono i casi da contemplarsi per ottenere la relazione: problema di somma importanza, che la Geometria meno adeguatamente risolve, perchè abbisogna della grafica descrittiva, sempre fallace, de' lati e degli angoli.

Antes di per iniziare l'argomento: quattro angoli, generali nella loro specie.

I Che abbiano due angoli ed un lato?

II Che lato ed un angolo ed uno di essi opposto?

III Due lati e l'angolo da essi compreso?

IV I tre lati:

il 1.^o de' quali abbaccola 2 combinazioni, perchè ciascuna delle tre combinazioni binarie fra i tre angoli può riferirsi a ciascuno de' lati: il 2.^o si estende a sei, perchè ad ognuna delle tre coppie di lati corrisponde doppio angolo, e tre sono le combinazioni comprese nel 3.^o caso.

§. 135. Probl. I. *Allegare un triangolo di cui si conoscano due angoli ed un lato. Soluzione.* Indicando generalmente i dati per A, a, b , (T. 4.) la 1.^a delle formole esposte nel §. 125, cioè delle

$$\{A \text{ sen } b = \text{Sen } a, A \text{ sen } c = \text{Sen } a, \text{Sen } b = \text{Sen } c\} \dots (x)$$

$$\text{da } B_1 \text{ della 3.^a } C = \frac{\text{Sen } a}{\text{sen } b} \text{ sen } \frac{b \cos (a+b)}{\text{sen } b},$$

§. 137. Probl. II. *Seo due lati ed un angolo ad uno di essi opposto. Soluzione.* Qualunque siano i dati possono indicarsi per A, B, a . Or la 1.^a della (x) dà sen. b , seno a cui nelle tavole corrisponde l'angolo b ; il 3.^o angolo c è sen. $c = b$, e la determinazione del lato C spetta al probl. prev. i determinandone a cui si premette quella di b o di c , perchè la diretta ricerca di C è universalmente inopportuna.

§. 138. Probl. III. *Si conoscano due lati e l'angolo compreso.*

Uguagli sen. $(a+b)$ per sen. c la $A \text{ sen. } c = C \text{ sen. } a$ o il sen. A ($\text{sen. } a \text{ sen. } b + \text{sen. } b \text{ sen. } a$) = $C \text{ sen. } a$ cioè

$$A \text{ sen. } b \cos. a = (C - A \text{ sen. } b) \text{ sen. } a;$$

ovvero che, fatto il quadrato e sostituita $1 = \text{sen.}^2 a$ per $\cos.^2 a$, diviso

$$A^2 \text{sen.}^2 b (1 - \text{sen.}^2 a) = (C^2 - 2AC \cos b + A^2 \text{sen.}^2 b) \text{sen.}^2 a$$

ovv.

$$A^2 \text{sen.}^2 b = [A^2 (\text{sen.}^2 b + \cos.^2 b) + C^2 - 2AC \cos b] \text{sen.}^2 a$$

si prege: 1. per $\text{sen.}^2 b + \cos.^2 b$ deducendo

$$1 = A^2 \text{sen.}^2 b + C^2 - 2AC \cos b$$

$$A^2 \text{sen.}^2 b = A^2 + C^2 - 2AC \cos b$$

$$\operatorname{sen.}^2 b = \frac{A^2 \operatorname{sen.}^2 b}{A^2 + C^2 - 2AC \operatorname{sen.} b}$$

e mediante questa espressione, la

$$(B \operatorname{sen.} a)^2 = (A \operatorname{sen.} b)^2 \quad \text{dividendo}$$

$$\frac{B^2 A^2 \operatorname{sen.}^2 b}{A^2 + C^2 - 2AC \operatorname{sen.} b} = A^2 \operatorname{sen.}^2 b,$$

che supponendo $A^2 \operatorname{sen.}^2 b$ a tutto il denominatore si trova in $B^2 = A^2 + C^2 - 2AC \operatorname{sen.} b$.
Siccome B è un lato qualunque, A, C gli altri due e b l'angolo opposto a B , si ha necessariamente

$$\left. \begin{aligned} A^2 &= B^2 + C^2 - 2BC \operatorname{sen.} a \\ B^2 &= A^2 + C^2 - 2AC \operatorname{sen.} b \\ C^2 &= A^2 + B^2 - 2AB \operatorname{sen.} c \end{aligned} \right\} \dots \dots (8)$$

Dati per esempio A, C, b , ottiene

$$B = \sqrt{A^2 + C^2 - 2AC \operatorname{sen.} b}.$$

Le formole (8) sono interessanti e perciò dovremmo ristabilirle, ma non sono facilmente suscettive di brevità algebrica: il metodo che segue unisce alla eleganza la speditezza del calcolo logaritmico e deve preferirsi.

Gli angoli iguali essendo b, c , risulta

$$A : C :: \operatorname{sen.} a : \operatorname{sen.} c; \quad \text{quindi (di n.° 1.)}$$

$$A + C : A - C :: \operatorname{sen.} a + \operatorname{sen.} c : \operatorname{sen.} a - \operatorname{sen.} c$$

$$\text{ed } \frac{A+C}{A-C} = \frac{\operatorname{sen.} a + \operatorname{sen.} c}{\operatorname{sen.} a - \operatorname{sen.} c} \quad (177) \quad \frac{\operatorname{sen.} \frac{1}{2}(a+c)}{\operatorname{sen.} \frac{1}{2}(a-c)} \dots (9)$$

L'angolo noto $a+c$ ($=\pi-b$) diviso 2, pongasi nel l'angolo iguale $a-c$: dall'equazione (9) traggasi $\operatorname{sen.} \frac{1}{2}(a-c)$: dalla formole $\frac{1}{2}(a-c)$, e si avrà (5)

$$a = \frac{1}{2}(a+c), \quad c = \frac{1}{2}(a-c), \quad B = \frac{C \operatorname{sen.} b}{\operatorname{sen.} c}.$$

* Quando la voce di A, C si ha $1, A$ e $1, C$,

come ne' calcoli astronomici s'avrebbe metodo, per non essere obbligati all'importante ragione del logaritmo al numero, si ritraeva un angolo qualsiasi δ mediante l'equazione

$$\tan \delta = d. \frac{1}{c} \quad \text{d'onde} \quad \tan \delta = \frac{rd}{c},$$

e s'istituiva quest'altra

$$r \cot. (\delta - 45^\circ) = \frac{\tan. \frac{1}{2}(\alpha + c)}{\tan. \frac{1}{2}(\alpha - c)}.$$

Infatti (20 e 21) $\cot. = \frac{r^h}{\tan.}$, $\tan. 45^\circ = r$ e (15)

$$r \cot. (\delta - 45^\circ) \left[\frac{r^2 + \tan. \frac{1}{2} \tan. 45^\circ}{r (\tan. 1 - \tan. \frac{1}{2} 45^\circ)} \right] = \frac{r + \tan. \frac{1}{2}}{\tan. \delta - r} \\ \left(r + \frac{r^h}{c} \right) : \left(\frac{r^h}{c} - r \right) = \frac{A + C}{A - C} = \frac{\tan. \frac{1}{2}(\alpha + c)}{\tan. \frac{1}{2}(\alpha - c)} (*)$$

§. 133. *Probl. IV.* Dal numerico valore de' lati vuol dedurre quello degli angoli.

Richiamata la formula $B^2 = A^2 + C^2 - 2AC \cos. b$, proprii a $\cos. b = 1$ per $\cos. b [1 \text{ ed } \text{for. } (*)]$ e deducasi

$$2 \cos. \frac{1}{2} b = \frac{A^2 + C^2 - B^2}{2AC} + 1 = \frac{A + C^2 - B^2}{2AC} \\ = \frac{(\overline{A+C+B})(\overline{A+C-B})}{2AC} = \frac{ap(ap+2B)}{2AC}$$

e si avrà

(*) Abbiamo detto *Problema IV* perchè ha $\frac{1}{2} C^2$ perchè

rispetto al valor costante di A, C , e quest'equazione nel §. 132 della *Trattazione di Algebra* dell'autore, si aveva $\frac{1}{2} C^2$ solo per $\cos. b$ l'abbaglio di che fu preso sempre il segno ne comparso, e così costò il nome A, C , per determinarne le parti la costante dell'angolo rispetto al lato A , nel $\tan. \delta$.

ta l'analisi degli esempi astratti, sempre illustrabili quantunque istruttivi, ci porgevano due classi di problemi, gli uni pratici, gli altri teorici.

Probl. 1.^o Si domanda la lunghezza della linea CX (F. 5.^a) incommensurabile, ma tale, che la distanza di un suo estremo C da un punto A , sufficientemente lontano, possa dividerla. Soltanto la CA , di 100 braccia per es., si divide in due parti note, per es.^e uguali, in B ; essendosi $\hat{A}=54^{\circ}.30'$, $\hat{C}BX=44^{\circ}.30'$ (*): se ne deduca

$$\begin{aligned} \hat{A}XB &= 15^{\circ}, \text{ e dalla proporzione} \\ AB (= 50^{\text{br}}) : BX :: \text{sen. } 15^{\circ} : \text{sen. } 54^{\circ}.30' \text{ si avrà} \\ CX &= \left\{ \begin{array}{l} 1,5636907 (\text{sen. } 50) + \\ 0,9166108 (\text{sen. } 54^{\circ}.30') + \\ 0,5399110 (\text{sen. compl. } \text{sen. } 15^{\circ}) \text{ raggio } (50) \end{array} \right. \\ &= 1,0165968 \\ & \text{e però } BX = 1,5^{\text{br}} \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Facciasi $\hat{B}CX = a$, $\hat{B}AC = c$, e dalla formula (y) del §. 128. si ritragga

$$\frac{165^{\circ}}{65} \text{ sen. } a, 5ab \gamma = \frac{\text{sen. } 67^{\circ}.50'}{\text{sen. } \frac{1}{2}(a-c)}$$

$$\text{quindi } 1, \text{sen. } \frac{1}{2}(a-c) = 1, \text{sen. } 67^{\circ}.50' + a, 5ab \gamma =$$

$$10, 5899447 - 0, 400783 \gamma = 9, 9894104$$

$$\text{ed } \frac{1}{2}(a-c) = \frac{44^{\circ}.10'}{11^{\circ}}.$$

L'equazione $\frac{1}{2}(a+c) = 67^{\circ}.50' + \frac{1}{2}(a-c) = 44^{\circ}.10' + 11^{\circ}$ danno, sottraendo la a , $c = 15^{\circ}.59'.40''$; dunque CX $CB (= 50^{\text{br}}) :: \text{sen. } 44^{\circ}.30' : \text{sen. } 15^{\circ}.59'.40''$,

$$\begin{aligned} CX &= \left\{ \begin{array}{l} 1,5636907 (\text{sen. } 50) + \\ 0,9166108 (\text{sen. } \text{sen. } 44^{\circ}.30') + \\ 0,5399110 (\text{sen. compl. } \text{sen. } 15^{\circ}.59'.40'') \end{array} \right. \\ &= 1,0165968 \\ & \text{e } CX = 51,6^{\text{br}}. \end{aligned}$$

2. Se non è possibile d'oltrepassare il punto B si misura AB nel piano verticale BCX e si calcola BC (eqq.); indi si procede come nel n.° prec. in altra guisa:

Siccome $\hat{B} \hat{E} \hat{B} A$, così $\hat{B} \hat{A} \hat{X}$ con $\hat{A} \hat{X} \hat{D}$

e $CX:BX::\cos \hat{C} \hat{B} X:1$, risulta

$$CX=BA \frac{\cos \hat{A} \hat{B} X}{\cos \hat{A} \hat{D} X} \cos \hat{C} \hat{A} X.$$

3.° Quando la base si dee prendere inclinata all'orizzonte e fuori del piano BCX , qual'è la DE , si opera nel triangolo DEX , DFX come si è operato nei due ABX , BCX , e trovasi

$$FX=DE \frac{\cos \hat{D} \hat{E} X}{\cos \hat{F} \hat{D} X} \cos \hat{F} \hat{D} X;$$

Si sottrai $\hat{C} \hat{D} \hat{F}$ e siccome $DF[-v(\hat{D} \hat{X}^2-FX^2)]$

è noto, si avrà $CF:DF::\cos \hat{C} \hat{D} F:\cos \hat{B} \hat{C} F$,

$$\text{cioè } CF=DF \frac{\cos \hat{C} \hat{D} F}{\cos \hat{B} \hat{C} F}.$$

4.° Trattandosi di una torre obliqua, di un muro a scarpa ec. si opera come nel Probl. 1.° §. 133. Probl. 3.° Si domanda la distanza DF

di un dato punto D ($F=5$) da una retta inaccessibile CX . Soluz.—Misurata la DE si calcolano DC , DX come si calcolavano CE , EX (§. 41) e determinata la CX come (§. cit.) si appura l'angolo DXF e si avrà $DF=DX$ con DXF .

Si può anch' esprimere la DF pe' lati del triangolo CDX , che per comodo rappresentiamo con la $F=4$, dove $\sin(\cos)$ sta in vece della DF .

Ottenuta l'espressione $\lambda = C \cos b$ analoga alla
prec., dalla formula (8) del §. 178. si deduce con b, c

$$\cos b = \sqrt{1 - \left(\frac{A^2 + C^2 - B^2}{2AC} \right)^2} = \sqrt{1 - \frac{4A^2 C^2 - (A^2 + C^2 - B^2)^2}{4A^2 C^2}}$$

$$\text{e sarà } \lambda = \frac{1}{2A} \sqrt{4A^2 C^2 - (A^2 + C^2 - B^2)^2},$$

formula che si scompone in

$$\frac{1}{2A} \sqrt{\{(A+C)^2 - B^2\} \{B^2 - (A-C)^2\}} =$$

$$\frac{1}{2A} \sqrt{\{A+C+B\} \{A+C-B\} \{A+B-C\} \{B+C-A\}} =$$

$$\frac{1}{2A} \sqrt{\{p(p-B)\} \{p(p-C)\} \{p(p-A)\}} =$$

$$\frac{1}{2A} \sqrt{p(p-A)(p-B)(p-C)},$$

e siccome, moltiplicandola per $\frac{1}{2}A$ produce la
superficie s del triangolo che, si ha

$$s = \sqrt{p(p-A)(p-B)(p-C)},$$

formula speciale che ci giova di avere indipen-
dentemente intracciata, e dalla quale non vogliamo

dedurre $\cos \frac{1}{2}A$ sen. c , dato $\frac{B^2 \sin c}{2}$ capote del (*)

§. 144. Probl. 4.^o Si conoscono le lunghezze del-
le strade $AB, BC, CD, DE, (F. 3)$ e quella
degli angoli B, C, D , e quantunque non si po-
ssa riguardare da E in A , si vuol trovare la
nuova strada EA , e se ne vuol sapere la lun-
ghezza. Soluz.^{ne} Calcolate la lunghezza delle ret-
te EC, CA nei rispettivi triangoli, CDE, CAB (138)

si determini $\hat{DEC}, \hat{ECD}$ nel Δ^o , $\hat{ACB}$ nel Δ^o e

(*) Questa formula sempre che è giusta anche in angoli spunti
danno come, i triangoli del testo che lo comprovano.

si avrà $\overset{\Delta}{\angle} ECA$; quindi $\overset{\Delta}{\angle} EA$ pel §. cit.; ma conoscendo i lati del triangolo $\overset{\Delta}{\triangle} ECA$ si possono calcolare $\overset{\Delta}{\angle} CAE$, $\overset{\Delta}{\angle} CED$; il 1.^o di questi unite a $\overset{\Delta}{\angle} CAB$ ($=10^\circ$, $\angle BACB$) costituirà $\overset{\Delta}{\angle} BAF$, cioè la distanza del punto AF ; il 2.^o forma la direzione del tratto EF , direzione che può anche dedursi dalla differenza $\overset{\Delta}{\angle} EC - \overset{\Delta}{\angle} CA$ ($=\overset{\Delta}{\angle} DEF$).

§. 145. Probl. 5.^o *Trascurando della vista B di un monte (F. 9) non l'occhio armato di telescope, l'orizzonte circumsolare del mare, ovvero $\overset{\Delta}{\angle} ABC=35^\circ$. Qual è l'altezza della mia montagna? Soluzione.* Prolungata la verticale BD dico al centro C , siccome BA è tangente in A si ha $\overset{\Delta}{\angle} CAB=90^\circ$ e sta $CB:CA::r:\sin 35^\circ$, dove $CA=19635000$ piedi di Parigi (*). Dunque $\overset{\Delta}{\angle} CB=\overset{\Delta}{\angle} CA - r - \sin 35^\circ$, cioè (100 la *line*)

$$\overset{\Delta}{\angle} CB = \left\{ \begin{array}{l} 7,839203 + \\ 10 \\ 9,9999338 \end{array} \right\} = 7,839203,$$

logaritmo che nella tavola de Gardiner corrisponde a 19635: Attena la caratteristica 7 che indica otto cifre si prende il numero 19635000, e solo AC si ha 3000 piedi, altezza richiesta.

Dato l'altezza del monte, per la qual determinazione si hanno due metodi, (***) non computato l'angolo, che è particolare e da noi adope-

(*) Prendiamo questo numero, adattato anche dal Cap. Capelli nella sua *Trigon.*, come molto comune nell'aritmo.

(**) Il metodo trigonometrico per vedere nella figura del Calo. 5. cit.

tato per circulo, può essere in A un agguato
lontanissimo, comunque situato per rapporto al
livello del mare, e valerà la distanza BA . Misu-

rato $\overset{\circ}{\angle}CAD$ si calcoli (137) $\overset{\circ}{\angle}ACB$, indi si dica

sen. $\overset{\circ}{\angle}CAD : \text{sen. } \overset{\circ}{\angle}ACB :: AC : AB$ e si avrà AB .

Nelle marine alcune si trova $\overset{\circ}{\angle}CAD = 48'$: per-
ciò la massima distanza terrestre CA , a cui il
raggio visuale può pervenire, è di circa 100
miglia.

§ 146. Non paga la Trigon.^a d'aver prestato
mirabile servizio all'ingegnere nelle più difficili
operazioni geodetiche, s'innalza nel cielo ed of-
fre all'astronomo infallibile norma nella ricerca
degli elementi, ch'esser debbon la base de' calco-
li nel calcolo: Basi per tutti il sog.

PROBL. 6. Si domanda un metodo per cui due
geometri, situati nel medesimo meridiano, assu-
mando la terra in un l'istesso arco, possano,
col soli principj della trigonometria rettilinea,
misurare la distanza tra'l centro della terra ed
il centro comune. Soluzione. Sieno A, F , (F pro.)
le stazioni de' due osservatori e sia nota la geo-
grafica loro distanza AF e perciò la corda AF ,
doppia arco dell'arco APF . Misurati gli angoli
d'elevazione $\angle AB, \angle FH$, del centro L su i re-
spettivi orizzonti AB, FH , nel momento in cui
passa pel meridiano AGF , aggiungasi a ciascuno
il rispettivo angolo eguale $\angle AP, \angle HP$, la cui
misura è $\frac{1}{2}AGF$, e nel triangolo ALF , ove oltre
il lato AF si conoscono gli angoli ad esso adia-
centi, si calcoli FL (136) e si vedrà che basta

aggiungere il complemento de' $\frac{1}{2}AGF$ ad $\angle APL$

per avere nel trigono CFL due lati e l'angolo compreso, per avere cioè gli elementi necessari onde calcolare (158) la CL , distanza richiesta.

Si vedrà nell'Astronomia che gli osservatori possono anche trovarsi a diversa longitudine, perchè l'ora e l'altra longitudine dei siti ad un tramò. (*)

Passando ai problemi teorici da.

§. 147. Probl. 1.^o Qual dei seni il valore degli angoli opposti i lati A, B, C , e la perpendicolare A' , caduta da un vertice a sull'opposto lato A , formano la progressione $A : B : C :: A^2$ Soluzione. La proporzione $A : B :: C : A'$, costrutta dai primi e dagli ultimi due termini, dà $B.C = A.A'$. Ma $A.A' = a$ (145 nel fin) $= B.C \cos a$; dunque sen a : ed ang a' . Ciò posto si ha

$$A : B :: \operatorname{sen} a' : (-1), \text{ cioè } b$$

$$B : C :: 1 : \operatorname{sen} b (145), \text{ cioè}$$

$$\operatorname{sen} b \operatorname{sen} a' b = \frac{a}{\operatorname{sen} b} \quad \text{quindi } \operatorname{sen}^2 b$$

ovale $1 - \cos^2 b = \cos b$, e trattando $\cos b$ come l'incognita dell'eq. $\cos^2 b - \cos b + 1 = 0$ offre per $\cos b = \frac{1}{2}(-1 \pm \sqrt{5})$ o $\frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{5})$ o $\frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$ o $\frac{1}{2}(1 - \sqrt{5})$; dunque $b = 51^\circ, 56'$, o $28^\circ, 40'$.

§. 148. Probl. 2.^o Risolvere il triangolo di cui si conosce un angolo, il perimetro e l'op. Soluzione. Detto a l'angolo, l'equazione $\cos A + B + C = ap$, $B.C \cos a = ac$, $B^2 + C^2 - 2B.C \cos a = A^2$, e la 3.^a, cioè $(B+C)^2 - 2B.C(1 + \cos a) = A^2$, sostituendosi $ap - A$ per $B+C$, e $\frac{c}{\operatorname{sen} a}$ per $B.C$,

(*) Il P. Targui, accennato all'ora la soluzione del probl. per le solite: « leur date est un grand secret, qu'on leur en est secret, en cas, et de les deux autres, qu'on leur en est secret ».

$$\text{di cui } (xp-A)^2 - \frac{B^2}{\sin^2 \alpha} (1 + \cos \alpha) = A^2 ;$$

e supposto A^2 posto

$$A \mp \frac{B}{p} \left(\frac{1}{\sin^2 \alpha} + \cos \alpha \right) \mp p \cdot \frac{1}{p} \cos \frac{1}{2} \alpha .$$

Si elimini B dalle due prime eq.^e e si avrà

$$C = \frac{1}{2}(p-A) + \sqrt{\frac{1}{4}(p-A)^2 - \frac{B^2}{\sin^2 \alpha}} \quad (*) , \quad B = xp - A - C .$$

§. 149. Probl. 2.^o Dati gl' angoli b , c ed il lato A (F.^o 4) trovare uno de' segmenti $a'b$, $a'c$, fatti dalla perpendicolare aa' . Soluzione. Deducasi

$$B = A \frac{\sin b}{\sin c} \text{ e si avrà}$$

$a'c = B \cos c = A \cos c \cdot \frac{\sin b}{\sin c}$, formula trattabile col logaritmi (**).

§. 150. Terminiamo con alcune osservazioni, parte istruttive per la gioventù, parte giustificative per noi, ed avvertenze che le due prime soluzioni fanno parte dell'usua come elementare.

I. Le formule spettanti alla trigon., siccome hanno anche un significato geometrico, debbono essere ammesse, tali cioè che i suoi termini contengano un egual numero di lettere positivi, eguale il numero dei negativi, di quelli cioè che trovansi nel denominatore. Non può essere per es.^o $\cos c = \frac{\sin b}{\sin c}$, perchè tan.cos. espone un rettangolo

(*) La base della formula

$$\sqrt{(A^2 + ab \cos c)(a + b + c)} + b \sqrt{(A^2 + ab \cos c)(a + b - c)}$$

si compie doppie sostituzioni di valore.

(**) È preferibile ad $\frac{1}{2}A \left(1 + \frac{\sin (b-c)}{\sin b} \right)$, formula proposta da Cagnoli.

la, mentre essa copre una retta, una deve avere l'angolo zero. Così

$$\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$$

è una formula trigonometrica ed incompleta, che fa d'uopo completare sostituendo le tangenze potenze del raggio r , il che produce (116).

$$\frac{r^2(\tan a + \tan b)}{r^2 - \tan a \tan b},$$

funzione di una dimensione, perchè i fattori componenti i termini del numeratore sono tre, due quelli che compongono i termini del denominatore.

II. La soluzione di un probl. trigonometrico allora soltanto può dirsi perfetta, quando l'espressione dell'incognita è dotata della possibile semplicità e dipende da soli elementi dati, poichè se trovai r per a , poena x per i , il valor finale risulta doppiamente incerto, attesa l'approssimazione a cui raggiunge r , e quella inerente al metodo che da r ricava x .

III. In qualità di risulamento si preferisce il metodo più semplice e breve. Valendosi sciogliere per es.^a il seg. Dati i lati di un triangolo inscritto al circolo trovare le diagonali:

la voce di adoperare il metodo proposto da Cagnoli, dicasi

A, B, C, D i lati, E, F le diagonali, e l'eq^a

$$E.F = A.C + B.D, \quad \frac{E}{F} = \frac{A.C + B.D}{A.B + C.D} \quad (17):$$

moltiplicate e divisa l'una per l'altra, daranno es.

IV. La risoluzione di un triang. rettilineo può derivarsi da insostituibili tria di elementi ret-

(1) Veggasi l'articolo *Geom.* di Lagrange

relativi a quel del trigono stesso, quali sono le perpendicolari, il perimetro, la superficie ec., ma tale indagine oltrepassa la sfera degli elementi.

APPENDICE I

Pag. 15 - §. 11. - lin. 11... dopo *semplicità* (*)

(*) Quest'ultima proposizione non abbisogna, come altri ha pensato, di alcuna prova, perchè l'unica maniera di rendere più semplice una equazione, consistendo nella soppressione di un fattore comune a' suoi termini, quando vi si sopprime il factor comune che li comprende tutti, più non resta luogo ad ulteriore riduzione.

Pag. 17. innanzi al §. 12.

Per trovare il massimo divisore di tre quantità numeriche o letterali A, B, C si determini π , massimo divisore di A, B , indi π' , massimo di π, C e sarà π' quello che si richiede. In fatti se $A = \pi q$ e $B = \pi q'$, dove q, q' sono primi tra loro, supponendo $\pi = p\pi'$ e $C = p'\pi'$, dove anche p, p' sono tra loro primi, risulta

$$A = pq\pi', B = p'q'\pi', C = p'\pi',$$

ed è chiaro che nessun $\pi'' > \pi'$ può dividere i secondi membri, perchè $q, q'; p, p'$ esclusi per ipotesi qualunque factor comune.

che

Se le quantità proposte siano A, B, C, D , il massimo divisore di tutte è quello di A', D , che diciamo x'' , ed eccome la ragione:

Poiché $A=qa', B=q'a', C=q''a'$, è certo che le quantità q, q', q'' non ammettono un comune divisore: ma se $x'=pe''$ e $D=pr'a''$, dove p, p' sono primi tra loro, risulta

$A=ppqa'', B=pp'q'a'', C=ppq''a'', D=pr'a''$,
e $pq, p'q', pq'', p'$, escluso qualunque divisore comune: dunque ac. È inutile dimostrare la generalità di un metodo, il cui uso sempre tiene la pratica limitata ad un ristretto n.° di quantità.

Pag. 62 - l. 2. Aumentata la caratteristica di x si producono i logaritmi contigui

$3,7435016 (= \log. 5545)$; $3,7438823 (= \log. 5546)$,
indì la loro differenza $0,000381$, e quella tra il log. dato ed il minore de' prec., cioè $0,000532$, e divisi: se l'addizione di $0,000381$ a $\log. 5544$ accresce di 1 il n.° corrispondente 5544, quale aumento in esso produrrà la giunta di $0,000532$? Il q.° proporzionale (Arithm.) dà $0,755 \dots$.
Dunque $5544,755 \dots$ è il n.° del $\log.^{10}$ $3,7438823$, e però $5544,755 \dots$ quello che si richiede.

Pag. 114 - l. 9. Quando $x=\frac{1}{2}$ è $y=\frac{1}{2}$ e viceversa: ciò significa che il probl. ammette un infinito numero di soluzioni. In fatti

$aB+bC=0$, $aB+bA=0$ danno $\frac{1}{2}=\frac{b}{2}$, $\frac{a}{2}=\frac{b}{2}$; quindi $\frac{1}{2}=\frac{a}{2}$; cioè $aC-aA=0$ e però $y=\frac{1}{2}$.

Ricordando a e c dalle due $aB+bCa, aB-bA=0$ si ottiene $a=\frac{c^2A}{B}$, $c=\frac{B^2}{A}$, $ax+by=c$ diviso per $\frac{A}{B}$ $x+by=\frac{B^2}{A}$, cioè $Ax+By=C$. L'equazioni del probl. equivalgono dunque ad una, e siccome la incognita non due, può ella verificarsi con infinite coppie di valori d' x, y , oltre non richiedendosi che datus uno ed x per dedurre dalla eq. stesso il corrispondente valor d' y e viceversa.

A P P E N D I C E II. pel §. 151.

Il Sig. Prof. *Fleud*, dopo una dilicata revisione della *trigonometria* del Cav. *Cagnoli* e della nostra (*) prosegue il saggio storico, premesso a' suoi *elementi di trigonometria* dicendo, che nessuno ha cominciato prima del Sig. *Forgata*, che i termini delle funzioni circolari, ed i problemi della misurazione angolare e della descrizione di un poligono regolare, possono dedarsi come immediate conseguenze del teorema di Tolomeo, e aggiunge che sarà vantaggioso il vedere uniformemente dimostrati per mezzo di esso quelli di *Ptolema* sulle corde, e le formule di

$$\cos. (m \pm p), \cos. (m \mp p).$$

Atteschè li stessi esposti non contine effusioni da tale derivamento, che tende a sbadare della

(*) Vol. I. in 4.^a Lucca 1809.

pubblica istruzione le nostre produzioni trigonometriche, possiamo a provare le due seguenti proposizioni.

I. Se gl'ioa ricevano le fondamentali nozioni delle trigonometrie dal teorema di Tolomeo, noi ne abbiamo abbastanza profittato, per non meritare la minima disapprovazione.

II. L'antichità usava non vanta la suppellettile, ed il nuovo metodo è per le cose importanti.

Come quel filosofo dimostrava presuppone l'esistenza del moto, così noi dimostreremo la prima proposizione aprendo il secondo tomo della Scienze del Calcolo, e additando ai lettori il §. 107, dove il teorema di Tolomeo è (secondariamente, e come un oggetto di tradizione) applicato alla ricerca delle formole esprimenti $\sin(x \pm b)$, $\cos(x \pm b)$: mostreremo che nel §. 104 e 105. ne abbiamo immediatamente dedotte le formole (a), (p), (r), (Elem. 106 e 108) e faremo altresì vedere nel §. 125 della 3a. del Calc. le formole (s) ritenute come (Elem. §. 108) Ecco dunque dileguata la più significativa parte della promessa impetuosa.

Il Sig. Forgiat, Matematico che si segnalava col dovuto rispetto, e della cui Memoria lodato il Sig. Professore ha fatto servizio uso, ottiene con molta eleganza, mediante il teorema sopra citato le formole particolari:

$$r \sin \beta \sin \alpha = r \sin \beta \cos \alpha \tan \alpha$$

$$r \sin \beta \sin \alpha = r \sin \beta \cos \alpha \tan \alpha$$

$$r \sin \beta \sin \alpha = r \sin \beta \cos \alpha \tan \alpha$$

$$r \sin \beta \sin \alpha = r \sin \beta \cos \alpha \tan \alpha$$

$$r \sin \beta \sin \alpha = r \sin \beta \cos \alpha \tan \alpha$$

comprese nella (c) del § 128; indi si arriva alla formula generale con un artificio, consistente nell'addizione delle rispettive equazioni

$$\cos(\alpha+\alpha)=\cos, \sin(\alpha+\alpha)=\sin,$$

$$\cos(\alpha+\alpha)=\cos, \sin(\alpha+\alpha)=\sin;$$

artificio non così naturale e spontaneo, come la sostituzione di α per α e β per β in (f), (g), formule note e caratteristiche, derivanti dal teorema citato: ed a questo proposito si può notare, che qualora si abbiano più proposizioni strettamente connesse, ed interessanti la teoria di una scienza, l'ultima nella sequenza si faccia discendere dalla 1.^a piuttosto che dalla pen.

Dalla (c) il Sig. Fergola si fa strada all'equazione

$$q^{-n} \left[(\sqrt{q+q^2})^{n-1} - \frac{n-1}{1} (\sqrt{q+q^2})^{n-2} + \frac{n-2}{1} (\sqrt{q+q^2})^{n-3} - \frac{n-3}{1} (\sqrt{q+q^2})^{n-4} + \cos \right]$$

dove $q = \cos \alpha$, $q^{-1} = \cos \alpha$, e radici destinate alla moltiplicazione di un arco ed all'inscrizione di un poligono regolare. Rispondiamo che l'esposta equazione, altrimenti da noi già rinvenuta ed esposta in una Memoria letta a questa R. Accademia, dipende da un'opera a difficile induzione; che esige anzi una parecchia rievocazione; che posto d'ordine, crescendo in, incita ad ogni un prefico, e che tutto computato ha l'aspetto di un simbolo di luna analitica.

Rispondiamo che in tra diverse guise abbiamo utilmente soddisfatto al doppio problema, esibendo cioè le formule (i) (128); l'equazione

$\tan, \tan \frac{n}{2} \tan, \tan \frac{n-2}{2} \tan, \dots \tan, (129)$, ed inoltre

le formule per li poligoni più semplici (128) e (3a. del Cal. 3a8); che di conseguenza abbiamo aperto per li bisogni del calcolo le tracce più

opportune e più vantaggiose, e ciò facendo possiamo gloriarsi di non aver perduta di vista, in virtù delle formule (i), il prodotto cercato.

Passiamo alla seconda proposizione.

La teoria relativa ad una figura geometrica, può dirsi nel miglior modo stabilita, quando i principali punti vengono facilmente e rigorosamente rinvenuti dalle proprietà della figura stessa o di altre più semplici. Nella tetragonometria per esempio è in alcuni casi opportuna e pergevole la risoluzione soddisfatta di due trigoni formati dalla diagonale: i noti teoremi sul tetragono inscrittibile al circolo, sono regolarmente dimostrati, perchè discosti dalla caratteristica del trigoni simili meritano approvazione le formule per la risoluzione de' tetragoni, perchè con elegante facilità discendono dalla teoria trigonometrica, e così via. Maie però si apporrebbe talui, che potesse di derivare le formule spettanti alla tetragonometria da un teorema proprio del pentagono: non bene chi si accinge a questo per risolvere quello, sostituito l'ipotesi, che non altro meno si tentasse per tale assunto.

Se ciò è vano, come sembra indubitato, forse è concludere, che la derivazione della scienza trigonometrica dal teorema di Tolomeo, possa o debba dirsi commendabile, nel solo caso che manchi age' altre mezzo per ottenere le princi-

pali formule trigonometriche. Or questo è falso, e la nostra trigonometria dimostra che a tal uopo basta la nozione del seno combinata con una semplicissima proprietà del trigono; dunque non è necessario il voler discendere dal momento di Tolomeo la dottrina delle funzioni circolari ec. (*)

CAPITOLO II.

Applicazione dell'analisi finita alla Geometria elementare.

§. 156. La difficoltà che non di rado s'incontra quando vuoi soddisfare alle condizioni di un problema coi principi della Geometria, e cui mostri offerti dalla risoluzione trigonometrica, ha consigliato i Geometri a chiamar in soccorso i metodi e gli ordini dell'analisi calcolatrice. Il principale studio in tal guisa si riduce a compiere la figura esprimente il quesito, con alcune rette variabili, che rappresentino qualche nuova rapporto, oppure il metodo di un elemento correlativo alle incognite, per trarne le opportune equazioni, tali cioè che bastino per ottenere l'espressione de' richiesti valori sotto una forma capace di spedita e semplice costruzione, giacchè la soluzione algebrica allora soltanto può dirsi soddisfacente, quando le formule finali ammettono facile e adeguata traduzione in valori geometrici, il che significa costruirli. Gli scoli sempre, l'esercizio e l'industria suppliscono al difetto delle regole, che invece di aspetterebbero nella sempre varia e tra lor diverse circostan-

(*) Non avendo tempo di comporre in una più estesa dissertazione ec., di trascrivere di passaggio le altre circostanze.

se. Vediamo intanto come procedasi alla costruzione delle formule, che per adesso supponiamo dedotte dall'equazioni di n' e di n'' grado, e perciò spettanti a problemi compresi nella sfera della Geometria elementare, e che gli antichi danno problemi piani.

§. 155. La più semplice formula razionale relativa ad una linea retta, $\frac{\alpha_1 \alpha_2}{\alpha_1}$, si costruisce

con prendere su i lati di un angolo FAG (Fig. 10) le parti $AD = \alpha_1$, $AE = \alpha_1$, $DB = \alpha_2$, congiungendo D con E , e tirando per B la BC parallela a DE , poichè il segmento EC ($=h$) è (Geom.) il 4^o proporzionale dopo i termini α_1 , α_1 , ed α_2 . Lo stesso metodo si estende alla formula

$$\frac{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \dots \alpha_n}{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \dots \alpha_{n-1}}$$

poichè l'ultima delle quante proporzionali

$$\frac{\alpha_1 \alpha_2}{\alpha_1} = h_1, \frac{h_1 \alpha_2}{\alpha_2} = h_2, \frac{h_2 \alpha_3}{\alpha_3} = h_3, \dots, \frac{h_{n-2} \alpha_n}{\alpha_{n-1}} = h_{n-1},$$

coincide appunto con la retta x .

Per costruire la formula generale

$$\frac{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \dots \alpha_n = h_1 h_2 h_3 \dots h_{n-1} = c_1 c_2 c_3 \dots c_n = ab}{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \dots \alpha_{n-1} = \beta_1 \beta_2 \beta_3 \dots \beta_{n-1} = \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 \dots \gamma_{n-1}} = ab$$

che si suppone a dover essere omogenea e di una sola dimensione (150) si trasforma il numeratore in un aggregato di tante linee rette quanti sono i suoi termini, dividendo questi pel prodotto di $n-1$ fattori di un suo termine, come per $\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n$, indi si fa lo stesso per rapporto al denominatore i cui termini si dividono per

$a_2 a_3 \dots a_{n-1}$, cioè pel prodotto di $n-1$ fattori in quelli presenti nella divisione del numeratore. In tal guisa il numeratore ed il denominatore rispettivamente divengono

$$\frac{b_1 b_2 \dots b_n}{a_1 \dots a_2 a_3 \dots a_n} = \frac{c_1 c_2 \dots c_n}{a_2 a_3 \dots a_n} = ca \cdot ma_1 mb_1 mb_2 \dots mn.$$

$$\frac{a_2 a_3 \dots a_{n-1}}{a_2 a_3 \dots a_{n-1}} = \frac{b_1 b_2 \dots b_{n-1}}{a_2 a_3 \dots a_{n-1}} = ca \cdot ma_1 \dots mn.$$

e perchè nel divisore de' termini del denominatore è rimasto a_1 , si moltiplica entrambi

$$\frac{a_1 (a_1 mb_1 mb_2 \dots mn)}{ma_1 ma_2 \dots mn} = \frac{a_1 \cdot R}{R} = L.$$

Così $\frac{abc^2-d^2c+f^2g^2}{f^2g^2+cd^2}$ si fa dipendere dalle seguenti operazioni:

$$\frac{abc^2}{d^2c} = d + \frac{f^2g^2}{d^2c} = b_1 - d + b_2; \quad \frac{f^2g^2}{d^2c} + \frac{g^2}{d^2c} = ca + ca_1.$$

$$\frac{d(b_1 - d + b_2)}{d + ca_1} = \frac{dR}{R} = L.$$

§. 154. L'equazione di 1.^a grado, relativa ad un problema geometrico uno di una delle forme
 $x^2 = bc, \quad x^2 - ax = bc;$

ed essere la 1.^a che si costruisce mediante la corda BE (F. 11) media geometrica tra il diametro AB= b ed il segmento BD= a , corda che resta determinata dalla perpendicolare alzata nel punto D sul diametro AB, e prolungata, sino alla circonferenza in E, possiamo considerare

la 2.^a, cioè la formula $x = \frac{1}{2}a \pm \sqrt{\frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{4}b^2}$.

Tirate le rette MN, GM (F. 12) prendasi AB= a , AP= $\frac{1}{2}a$, PD= c : per A, B, D, si de-

si tiri un circolo il cui centro C , ed un 2.^o circolo descritto col raggio CP e con la stessa centro, tagliando GM in L ed E , HN in I , dove $x = AE$, $x = AL$. Inhen (Geom.²) $LA = FD$ me, $LA \cdot AF = bc$, e posta AE per chialta $AL = BE = x - a$ ed $AL \cdot AE = x^2 - ax$. Ma (Geom.²) $AL \cdot AE = LA \cdot AF = bc$; dunque se

L'ipot. $AL = x$ da $AL = x - a$ ed $AL \cdot AE$ viene $x^2 - ax = bc$ come sopra.

Per $x^2 - ax = bc$ si prende (P 13.) $AD = a$, $AF = b$, $FD = c$, si opera al solito e si trova $x = AE = AL$. Basta notare che i triangoli simili AED , AFL danno $AE \cdot EB = AF \cdot FD$; quando sono in la $AE = a$, $EB = x$, $AD = b$, $AF = c$. Si può anche costruire $bc = a^2$ indi l'ipotesura $x = \sqrt{a^2 + \frac{1}{2}a^2}$ ovvero il cateto $\beta = \sqrt{\frac{1}{2}a^2 - a^2}$, e si può dedurre $bc = ad$ per trovar poi la media geom. tra β ed a .

È simile la costruzione di

$$\sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + \frac{f^2}{4}} \text{ ecc.}$$

che si ottiene facendo

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 &= m^2, \quad a^2 + c^2 = \beta^2, \quad \beta^2 + d^2 = \gamma^2, \\ \gamma^2 + \left(\frac{f^2}{4}\right) &= \gamma'^2 \rightarrow \left(\frac{f}{2} - g\right)^2 + \frac{1}{4}g^2 = \gamma'^2 + d'^2 = a'^2. \end{aligned}$$

§. 155. Probl. 1.^o Trovare i lati di un rettangolo di cui si ha la superficie e la somma di due lati contigui e della diagonale, evitando l'equazione completa di 4.^o grado. Soluzione. Chiamando x la somma, y la differenza de' lati, il maggiore è $(\frac{1}{2}x + y)$, il minore $= x - y$; quindi la superficie

$$(x+y)(x-y) \text{ ossia } x^2 - y^2 = a^2,$$

e la somma de' lati, e della diagonale

$$ax + b\sqrt{(x+y)^2 + (x-y)^2} = ab,$$

dal che $ax + b\sqrt{2x^2 + 2y^2} = ab$;

e perchè $y^2 = ax^2 - a^2$, $ax + b\sqrt{2ax^2 - 2a^2} = ab$;

si trasponga ax e fatto il quadrato si avrà

$$4x^2 - 2ax^2 = b^2 - 4bx + 4x^2,$$

vale a dire $x = (ax^2 - ab^2) : 4b$,

formola che si costruisce deducendo

$$b : a :: ax : b, \text{ d'onde } \frac{ax^2 - ab^2}{4b} = \frac{bx + b^2}{4b} = \frac{b + b}{4} = a$$

e poi $y = \sqrt{x^2 - a^2}$, calcolo del trigono ec.

§. 156. Probl. 1.^a Si dividano due rette di cui è nota la media, di arbitraria età geometrica. Soluzione. Siano x, y le rette richieste, a la media aritmetica, b la geometrica, e si avrà $x + y = 2a$, $xy = b^2$.

Dalla 1.^a $x = 2a - y$; la 2.^a diventa $y^2 - 2ay = -b^2$ e da

$$y = a \pm \sqrt{a^2 - b^2}, \quad x = a \mp \sqrt{a^2 - b^2}.$$

Rappresentando per $AB (= a)$, $AC (= b)$ (F. 14.) la media, si descriva col raggio AC l'arco CG ; per B si tiri la BF tangente in F ; col raggio BF si descriva il semicircolo DFE e sarà

$$y = AE, \quad x = AD.$$

Infatti $AD + AE = a$ ($AD + BD$) $= AB = 2a$, ed

$$AD : AE (= AC = b) :: AF : AE.$$

§. 157. Probl. 2.^a Dividere un dato pentagono regolare $ABCDE$ (F. 15.) con una trasversale, parallela ad un lato, ed ED per ec., in guisa che il trapezio $EDGN$ risulti $= c$. Soluzione. Ponendo $ED = a$, l'altezza MP del trigono isoscele DEF , $= b$, MPN , distanza della parallela, $= x$.

Del trigono HEF , EAF si ha $HE = \frac{a}{\sqrt{3}}$; quindi

trap. $EG = (a + \frac{12}{5})x - c^2$, ed $x = b + \sqrt{(\frac{12}{5} - b^2)}$

Si costruisca un quadrato d^2 tale che sia $d^2 : c^2 :: ab : a$ (Geom.) e l'apotema $\sqrt{(\frac{12}{5} + d^2)}$ divisa di 5 sarà ac . La Geom. darà: descrivete il trigono agli angoli ed EFD ed $ab = ac^2$; perpendi $FH = FG = fa$ ed HD sarà ac .

§. 158. Probl. 4.^o Dato di grandezza e di posizione il circolo $AEBF$ (F. 16), un punto D nel diametro ACB , e l'angolo CDE fatto dalla corda EDF , descrivere un circolo che tocchi l'arcuola corda, il segmento DB e la circonferenza del circolo dato. Soluzione. Il centro del circolo richiesto dev'essere nella retta DE che bisaglierà l'angolo BDE , perchè supponendolo in G , se si condurrà un raggio di contatto GM , ne nascerà il trigono rettangolo eguale tra loro, GOD, GMD , ove $GDO = GDM$. La DE e la circonferenza $AEBF$ essendo linee determinate, tal è necessariamente il loro incontro I (*): si può dunque apporre nota la DN , ma condotta la IN perpendicolare a CB , nel trigono DIN , ove si conoscono gli angoli e l'ipotenusa, si possono calcolare i cateti (143): dunque può farsi $DN = a$, $IN = b$.

Sia $CD = m$, $CB = r$, $GA = x$, $GM = GN = y$, e si avrà CG ossia $(r - y)^2 = m^2 + y^2$, cioè $x^2 = m^2 - my$: dalla proporzione $DN (= a) : IN (= b) :: DM (= m - c) : GM = \frac{12 - c}{5} my$, e sostituita questa espressione di y nella superiore equazione in x, y avremo

Sia $CD = m$, $CB = r$, $GA = x$, $GM = GN = y$,
e si avrà CG ossia $(r - y)^2 = m^2 + y^2$,

cioè $x^2 = m^2 - my$: dalla proporzione

$DN (= a) : IN (= b) :: DM (= m - c) : GM = \frac{12 - c}{5} my$,

e sostituita questa espressione di y nella superiore equazione in x, y avremo

(*) Vedremo un poco che per trovare la posizione del punto I basta costruire l'equazione della DE con quella del dato circolo.

$$x^2 = r^2 - \frac{d^2}{4}(p-a),$$

che facendo $a^2 = d^2 \cos^2 \theta$ dà

$$x = \frac{d}{2} \cos \frac{\theta}{2} \sqrt{(1 + \sin \theta - \cos^2 \theta)}$$

valore delle due rette CM, Cn .

§. 159. Proponiamo per esercizio i due seguenti:

Probl. I. *Inscrivere un quadrato in un dato semicerchio.* Datto r il raggio, ed x il segmento del diametro, partendo dal suo vertice, a cui corrisponde il lato verticale del quadrato, si ha il lato verticale $= \sqrt{(x^2 - a^2)}$ (*) ed il lato coincidente col diametro $= a(r - a)$. Ciò basta per trovare $x = r(1 - \sqrt{2})$; formula che si costruisce prolungando il raggio perpendicolare al diametro, si di esso di una lunghezza il prolungamento sia $= r$, perchè il circolo descritto col diametro eguale all'assidetto raggio intersecherà del prolungamento, taglia il diametro del semicerchio dato ne' punti richiesti.

Probl. II. *Dividere un circolo dato con un altro circolo concentrico in media ed estrema ragione, in guisa cioè che l'annella risulti media geometrica tra i due circoli.* L'equazione che risolve il problema è $x = \frac{1}{2}r(-1 \pm \sqrt{5})$, dove r è il raggio del circolo dato, x il segmento del suo diametro computato dal vertice di esso.

Il radicale si costruisce descrivendo un circolo col diametro $5r - 2r$, e prolungando questo diametro di $2r$, perchè la tangente condotta dall'estremità del prolungamento esprime appunto il radicale di cui si tratta.

(*) Congiunta la somma del lato verticale agli estremi del diametro si hanno due segmenti rettangoli uniti, nel quali il prodotto lato verticale è comune, e la proporzione de' lati come basi dà $(x-a)^2$ lato vert. :: lato vert. x .

Geometria di situazione.

—

ARTICOLO I.

De' punti e delle rette in un piano.

— §. 150. Un punto M (Fig. 17, Tav. II.) è costituito in un piano Π condotta per esso, su di esso stesso le rette $MO(-x)$, $MP(-y)$, rispettivamente parallele a due assi Ax , Ay , dati di posizione nel piano Π , e che per comodo si suppongono rettangoli. Infatti la MO fa conoscere la retta eguale AP , come la MP determina la sua eguale AO , e l'angolo delle parallele, non per P ad Ay , l'altra per O ad Ax , coiando col punto di cui si tratta. La x' delle coordinate AP , PM , è l'archia del punto M , la y' y' è l'ordinata, e perchè insieme costituiscono la situazione del punto M , si usano come idenico simbolo del medesimo il sistema $\{x=x', y=y'\}$.

Chiamando θ l'angolo che la retta Ax' fa con Ax , qualunque ordinata $MP(-y)$ sia alla corrispondente ascissa $AP(-x)$ come $\tan \theta$ ad 1 (150) e però si ha $y = \tan \theta \cdot x$ che diciamo ax ; $x = ax$ è dunque l'equazione di una retta che passa per l'origine e fa con l'asse delle x l'angolo noto θ .

Se Ax' si trasferisce nella situazione parallela Ax'' , alla stessa AP corrisponde l'ordinata $MP = MP + NM = MP + AD$; per conseguenza la MP sarà y risulta $ax + AD$, e dunque conoscere AD , che indichiamo per b , onde avere l'equazione della $y = ax + b$.

Traslando A' in D' si ha AP ossia

$y = AP = MP - MP' - AD' = b'$, dandole $y = 0 = b'$. La formula generale esprime la situazione di una retta in un dato piano, dove si comprendono tracciati gli uni rettangoli Ax, Ay , è pertanto $y = ax + b \dots (2)$

a è la tangente dell'angolo ch'essa fa con l'asse delle ascisse, b il segmento dell'asse y, Ay , armato in tal guisa che si distingue col segno $-$ se trovasi al di sopra di Ax . Supponesi che il punto N , scorrendo sulla $r^a B$, giunga in m : il punto P cadendo allora in p , l'ascissa AP , denotasi $= BP - BA$, denotasi $Bp - BA = Ap$; in conseguenza le ascisse alla sinistra dell'origine A debbono riguardarsi come negative, se positive sono state supposte quelle situate alla destra di A : viceversa.

Diventa ∞ la x della B' , resta > 0 la y finchè $ax < b$; si ha $y = 0$ quando $x = \frac{b}{a} = AB$, ma oltrepassata B risulta $y(\infty)$ espressa dalla pe , per qualunque valore $AB' > AB$, giacchè facendo $B'm$ cioè $x = (\frac{b}{a} + t)$ si ottiene $y = b + a(\frac{b}{a} + t) = at$.

Ciò dimostra la necessità di dare diverso segno alle coordinate che procedono in una direzione opposta. Nella D' si ha $y = 0$ quando $ax = b'$ tralasciando, il che succede nel punto q dove $x = \frac{b'}{a}$.

concludiamo la y negative quando x diviene $< \frac{b'}{a}$: unita la x la A , la y coincide con $AD' = b'$, ed in seguito il negativo valore della y va indefinitamente crescendo.

Fatto dunque in y la Br divisione parallela ad Ax ed ha per equazione $y=bx$; basta conoscere che la distanza Am,AD successivamente diminuisce, per vedere che $y=bx$ rappresenta l'asse Ax : infatti non ess' altra retta, eccettuata Ax , la cui ordinata sia tutta nulla. Così $x=ay$ esprime una retta parallela ad Ay , e da una distanza della quantità lineare a : perchè zero è il simbolo dell'asse Ay .

L'equazione $y=mx$ è quindi anche $y=mx+b$, esclusivamente si riferisce ad una linea retta, perchè $mx+y$ equivale ad $x:y::1:a$; e questa proporzione significa che sia

$$AP:PM::AQ:QK::ca::1:a,$$

cioè che gl'infiniti trigoni APM , AQR ec. sono simili, e la somiglianza esige che AM , MR , ec. si trovino nella stessa direzione.

§. 161. Per adattare il generale significato della formula (c) a qualunque siasi caso particolare, bisogna che la retta da esprimersi soddisfaccia a due note condizioni, atte a costituirne la determinazione: tali sono per esempio queste:

I. Che la retta proposta passi per due punti dati;

II. Che passi per un punto e faccia un dato angolo con una retta assegnata;

III. Che passi per un punto e scada ad angolo dato di grandezza e di posizione:

Siano x_1, y_1 le note coordinate di un punto, x_2, y_2 quelle di un altro, e si vedrà che le condizioni del numero I. si appagano verificate l'equazioni

$$y_1=mx_1+b; \quad y_2=mx_2+b;$$

Ma trattando a, b come incognite, ottienesi (54)

$$a=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}, \quad b=\frac{x_1y_2-x_2y_1}{x_1-x_2};$$

Quale la definitiva equazione della retta ¹²⁰ è

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) \quad \dots \quad (1)$$

Se una retta B' dovesse passare pel solo punto (x_1, y_1) si avrebbe l'uguaglianza

$$y - y_1 = a(x - x_1), \quad y_2 - y_1 = a(x_2 - x_1) \quad \dots \quad (2)$$

e quindi $y - y_1 = a_1(x - x_1) \quad \dots \quad (3)$

equaz. dove a_1 è indeterminata, perchè infinite sono le rette che possono condursi per un dato punto.

§. 16a. Date $\hat{ACB}$ (Fig. 18.), angolo che una data retta Ar fa con la retta B' , e dato un punto $M(x_1, y_1)$ per cui questa passa, si ha l'eq. (2), ed in essa è a , tangente di un angolo noto, perchè $\hat{x}B' = \hat{x}Ar + \hat{ACB}$, dove $\hat{x}Ar$ è l'angolo la cui tangente a si suppone data nell'equazione $y - y_1 = a(x - x_1)$ spettante alla retta Ar . Resta così determinata la retta mediante le condizioni del n.° II.

L'angolo $\hat{ACB}$ può essere $-\alpha$, ed $-\alpha'$. Nel 1.° di questi due casi le rette Ar, B' sono parallele; sono perpendicolari fra di loro nel 2.°

Nel 1.° caso è $\hat{x}Ar = \alpha \hat{x}B'$ e però $\alpha = a$, . . . (3)

Nel 2.° la B' trovasi nella situazione $B'r$ e si

ha $\hat{x}B'r = \alpha' \hat{x}Ar = \alpha' a$, e perchè (156)

$$\tan(\alpha' + \hat{x}Ar) \left[= \frac{\tan \alpha' + \tan \hat{x}Ar}{1 - \tan \alpha' \tan \hat{x}Ar} = \frac{\alpha' + a}{1 - \alpha' a} \right] = \frac{1}{\tan \alpha}$$

risulta $\tan \hat{x}B'r$, che chiamo $a_1 = \frac{1}{\alpha' + a}$, cioè

$\alpha' + \alpha = 90^\circ$. . . (4) Le condizioni da cui dipende

che due rette (r) , (r') siano parallele o perpendicolari fra loro, sono dunque rispettivamente

$$\{a \equiv a', \dots, I\}; \{a \perp a', \dots, II\}$$

§. 155. Se due rette s'incontrano le coordinate dell'intersezione sono comuni, e vi è per conseguenza un valore di x, y che verifica nel tempo stesso ambedue le loro equazioni (r) , (r') ; viceversa, la consistenza dell'equazioni considerate suppone l'incontro delle rette da esse rappresentate; e tal punto si determina ricordandosi

$$x = \frac{b-b'}{a-a'}, y = \frac{c-c'}{a-a'},$$

valori delle tre coordinate.

Dividendo r, r' , l'angolo dell'incontro si ha

$$\tan r, r' = \tan(r, x - r', x) = \frac{a'-a}{a+a'} \dots \dots (5)$$

formule che comprende come casi particolari l'equazioni di condizione I, II, nel che formasi

$r, x = r', x$ per la I.^a; $r, x \perp r', x$ per la II.^a

Quando le tangenti a, a' , esistono quasi simultaneamente nella tavola, la differenza de' rispettivi

angoli di inclinazione r, r' . Se vogliamo per esempio sapere l'angolo sotto cui s'incontrano le rette

$$y = x + 10 \dots (r); y = 0,5556x + 5 \dots (r')$$

siccome $a = 1 = \tan 45^\circ$, e $a' = 0,5556 = \tan 28^\circ 37'$,

trovati $r, r' = 45^\circ - 28^\circ 37' = 16^\circ 33'$.

§. 156. La distanza di due punti M, m (F.^o 18) si ha per mezzo delle coordinate ortogonali ed è

$$Mm = \sqrt{(x_m - x_M)^2 + (y_m - y_M)^2} \dots \dots (6)$$

perchè il triangolo Mm è un $\Delta P = x_m - x_M$; l'alt.

tro $ax = ay - MP = y_1 - y_2$. E siccome l'equazione ¹⁵⁵

$$y_1 = ax_1 + b, \quad y_2 = ax_2 + b$$

danno $y_1 - y_2 = a(x_1 - x_2)$ si ha pure

$$b = (x_1 - x_2)\sqrt{1+a^2} \dots (7)$$

Basta fare $x_1 = 0$ per avere la $b = x_2\sqrt{1+a^2}$ ($= \frac{dy_2}{dx_2}$)

L'espressione della distanza che passa tra l'origine ed un punto dato nel piano degli assi.

Sostituendo ad m un punto qualunque (x, y) si ha dalla formula (7) $x - x_2 = b\sqrt{1+a^2}$. Dunque l'equazione $y - y_2 = a(x - x_2)$ equivale ad

$$y = \frac{a^2}{\sqrt{1+a^2}} + y_2, \text{ e però anche al sistema}$$

$$\{y = a\lambda b + y_2, \quad x = a\lambda b + x_2\} \text{ dove } \lambda = \frac{1}{\sqrt{1+a^2}}.$$

§. 165. La retta che passa per (x_1, y_1) ed incontra ad angolo retto l'altra $y = ax + b$, ha per equazione (163)

$$y - y_1 = -\frac{1}{a}(x - x_1).$$

Dunque il loco cercato è dato (165) dal sistema

$$x = \frac{a+ax_1-1}{1+a}, \quad y = \frac{a+ax_1+1}{1+a}, \text{ e perchè}$$

$$x - x_1 = a^2(y - ay_1 - b), \quad y - y_1 = a^2(y - ax_1 - b),$$

mediante la formula (5) si ha la lunghezza della perpendicolare p , tirata da (x_1, y_1) sulla retta r , cioè $p = a^2(y_1 - ax_1 - b)$; formula che si riduce a $p = b$ quando il punto dato (x_1, y_1) è nell'origine.

De' punti e delle rette nello spazio.

§. 165. Un punto è determinato nello spazio quando si ha la sua rispettiva distanza $AM' = a$, $AM'' = b$, $AM''' = c$ (F. 13) da tre piani ortogonali noti di posizione, ax, ay, az , y, Az ; ciò non equivale all'intersezione di un piano parallelo ai rispettivi piani coordinati, uno distante da ax di AM' , l'altro da ay di AM'' , il 3.^o da az di AM''' . Tirato per M' le $M'P$, $M'Q$, perpendicolari ad Ax , Az , e congiunta P con M'' , alle due distanze MM'' , $M'M''$ si possono attribuire $AP = x$, $PM'' = y$, e levando $M''P = z$, si ha per esprimere la posizione di un punto M dato nello spazio, il sistema

$$[x=a, y=b, z=c].$$

La x ora indica un piano parallelo ad yz e così delle altre. Nella pratica architettonica ogni notevole punto di un edificio si rappresenta con due proiezioni, una orizzontale M' , l'altra verticale M'' : ciò suppone cognite le tre distanze di cui sopra, perchè M' dipende da $AP = x$, M'' da AP e $PM'' (= MM')$, ma si ha il vantaggio di una comoda costruzione. Il disegno formato dai punti M' dice il piano geometrico; quello che risulta dai punti M'' profilo se interno, situazione se esterno all'edificio.

La grafica determinatore di una retta si riduca a quella di due de' suoi punti. Siano (F. 14) M'' , N'' le loro proiezioni verticali, M' , N' le orizzontali, e le

$$M''N'' \dots (x=a_1+a) \quad M'N' \dots (y=a_1+ay)$$

costituiranno la situazione della retta: alla $M''N''$

può sostituirsi la 1.^a proiezione verticale in yz , la cui equazione $y=bt+\beta$. Due proiezioni portano dunque sotto loro la 2.^a. Noi adoperiamo il sistema

$$\left\{ x=at+\alpha, y=bt+\beta \right\} \dots R$$

L'equazione di ciascuna proiezione è simbolo del piano proiettante.

Eliminando dal sistema R la t si ottiene la 2.^a proiezione $y=bx+ay$.

Si ha l'incontro a della retta con xy prolungando $N'M'$ in a , indi $N'M'$ una alla perpendicolare alzata in a nel piano xy all'asse Ax . Un punto che debba trovarsi su una data retta R resta determinato per mezzo di una sua proiezione per es.^a $x=a, y=ay$, perchè se ne ha una 1.^a cioè $x=a, y=bt+\beta$. Se il punto dov'è dato in due rette date si costruiscono le loro proiezioni, ed i punti ove queste s'incontrano sono le proiezioni del punto.

§ 165. I termini α, β nel sistema R rappresentano le coordinate AE, ED (Fig. 10) del punto D in cui la retta EM prolungata, (retta di cui OK è la proiezione orizzontale, DE la verticale proiezione della EC) incontra il piano xy : i coefficienti a, b sono le tangenti degli angoli fatti dalle proiezioni verticali BC, FG con Ax , infatti $BP:MP$ (costa.) :: $\tan EAP:1$,

$EP=AP-AE=x-\alpha, MP=a$ ed $x-\alpha=a \tan EAP$, mentre la 1.^a della R dà $x-\alpha=at$. Dicesi lo stesso per FG .

Conoscendo a, b, α, β , basta dare due valori ad x , e calcolare col sistema R le y, z : l'intersezione delle coordinate corrispondenti y_1, z_1, y_2, z_2 determina la proiezione di due punti della retta R e perciò la retta stessa.

È coll. Sieno i punti $M(x, y, z)$, $m(x', y', z')$ ($F^{\circ} 22$) Congiunta la proporzioni m' , M' si tirerà per m la parallela ad $m'M'$, che incontrerà in r la MM' ; per M' l'ordinata $M'P$ o per m' la $m'O$ parallela ad Ax , che tagli in O la $M'P$.

Siccome $m'M = mp$ si ha la distanza $m'M'$ ossia

$$d = \sqrt{m'r^2 + M'O^2} ; \text{ e perchè}$$

$$m'r = m'M' = m'\sqrt{M'O^2 + m'O^2}$$

$M'O = x - x'$, $M'O = y - y'$, $m'O = z - z'$, risulta

$$d = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2} \dots (8)$$

Se m cade in A è $d = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Essendo α l'inclinazione della MM' con xy , è l'angolo ch'ella fa cogli la sua proiezione, si ha

$$MM' = \frac{mr}{\cos \alpha} = \frac{m'M'}{\cos \beta} = \frac{mp}{\cos \gamma \cos \delta} ;$$

formola val. quando MM' è perpendicolare ad xy , perchè qualunque sia la sua lunghezza, la proiezione orizzontale è la stessa.

§. 163. Per rapporto ad una retta R che passa per (x_1, y_1, z_1)

si ha $|x_2 \cos \alpha_2 + y_2 \cos \beta_2 + z_2 \cos \gamma_2| \dots R_2$

e parè $|x - x_1 \cos \alpha_1 + y - y_1 \cos \beta_1 + z - z_1 \cos \gamma_1| \dots R - R_1$

dove α_i è sono coefficienti indeterminati.

Se passa anche per (x_2, y_2, z_2) tenuto

$$|x_2 \cos \alpha_2 + y_2 \cos \beta_2 + z_2 \cos \gamma_2| \dots R_2$$

La differenza delle R_1, R_2 dà

$$d = \frac{x_2 \cos \alpha_1}{\alpha_1 - \alpha_2} + \frac{y_2 \cos \beta_1}{\beta_1 - \beta_2} + \frac{z_2 \cos \gamma_1}{\gamma_1 - \gamma_2}$$

e sostituendo in R_2 si ottiene

$$\alpha \alpha x, \frac{\alpha \beta - \alpha^2}{\alpha - \alpha_0}, \beta \alpha y, \frac{\beta \beta - \alpha \beta}{\alpha - \alpha_0}.$$

Donque la retta proposta vien' espressa per

$$x = \frac{\alpha \beta - \alpha^2}{\alpha - \alpha_0} + (\alpha_0 x_0 - \alpha_0 x) \frac{(\alpha - \alpha_0)}{(\alpha^2 - \alpha_0^2)} \\ y = \frac{\beta \beta - \alpha \beta}{\alpha - \alpha_0} + (\alpha_0 x_0 - \alpha_0 x) \frac{(\beta - \alpha \beta)}{(\alpha^2 - \alpha_0^2)}$$

la voce del sistema $R-R_0$ può adoperarsene un altro, talvolta utile.

Sostituendo l'equivalente d' $x - x_0$, e d' $y - y_0$, nella formula (E) (§. prec.) si ha $k \alpha (x - \alpha_0) \sqrt{(\alpha + \alpha^2 + \beta^2)}$ che diventa $(\alpha - \alpha_0) \sqrt{x}$, ed

$$x = \frac{\alpha^2}{\alpha_0^2} \beta + \alpha_0, y = \frac{\beta}{\alpha_0} \beta + y_0, \text{ con } \frac{\alpha^2}{\alpha_0^2} \beta + \alpha_0$$

è il sistema richiesto.

§. 170. Se la retta $[x = \alpha p + \alpha_0, y = \beta p + \beta_0] \dots R'$ è parallela ad R , condotto un punto P per entrambi, ciascuna eguale all'intersezione di un suo piano proiettante col piano P . Ma i piani proiettanti, relativi ad uno stesso piano coordinato, non possono incontrarsi in ciò non avvenga delle rette a cui appartengono, e però sono paralleli. Donque (Geom.) parallele sono tra loro le intersezioni degli suddetti piani proiettanti col rispettivo piano coordinato, tale cioè di la perpendici orientate che le verticali, della retta proposta, e però se R, R' sono parallele dov' essere

$$[\alpha \alpha_0, \beta \beta_0] \dots (III)$$

Supponendo data la retta R , l'equazione della parallela, cioè

$$[x = \alpha p + \alpha_0, y = \beta p + \beta_0] \dots (A)$$

contengano le indeterminante α, β , ma questa si esprime obbligandola a passare per un dato

punto, poichè l'equazioni (g) combinate con

$$x = \alpha_1 + \alpha_2, \quad y = \beta_1 + \beta_2,$$

riproducono il sistema R, R_1 ; con la differenza che ora i coefficienti α, β sono noti.

§ 171. Se due rette R, R' s'incontrano vi è un punto in cui hanno comuni le coordinate: in una condizione dunque i sistemi che le rappresentano: ma eliminando con questi x, y, z , si ottiene $(\alpha - \alpha_1)(\beta - \beta_1) = (\beta - \beta_1)(\alpha - \alpha_1) \dots$ (IV)
Dunque se le rette R, R' s'incontrano dev'essere verificato il criterio (IV').

La proposizione reciproca si dimostra ricavando $z = \frac{\alpha_1 \beta - \alpha \beta_1}{\alpha - \alpha_1}$ dalle proiezioni in xy ; indi

$z = \frac{\beta_1 \alpha - \beta \alpha_1}{\beta - \beta_1}$ da quale in yz , ed osservando che il criterio addotto rende identiche le precedenti espressioni, ed insieme quella del rispettivo valore d' x e d' y , provenienti dall'equazioni

$$x = \alpha z + \alpha_1, \quad x = \alpha_1 z + \alpha_2,$$

$$y = \beta z + \beta_1, \quad y = \beta_1 z + \beta_2.$$

Eliminando tra dell'equazioni R, R' per determinare le coordinate dell'incontro, cioè

$$x = \frac{\alpha \alpha_1 - \alpha_1 \alpha}{\alpha - \alpha_1}, \quad y = \frac{\beta \beta_1 - \beta_1 \beta}{\beta - \beta_1}.$$

$$y = \frac{\beta_1 \beta}{\beta - \beta_1} \quad \text{ovvero} \quad z = \frac{\alpha - \alpha_1}{\alpha - \alpha_1}.$$

Se $\alpha = \alpha_1$, e $\beta = \beta_1$, il criterio si verifica, ma divenne ciascuno delle x, y, z risulta infinita, le rette non s'incontrano giammai, vale a dire che sono parallele (§. prec.).

§. 172. Considerando le rette R, R' si deducano per l'angolo la quota

$\angle [a_{n+1}, p_{n+1}], [a_{n+2}, p_{n+2}], \dots, R_n$
parallele alle precedenti. L'angolo di questo è

uguale all'angolo $\hat{A}A'$ delle rette proiettate su questo prolungate d'incontro. In caso diverso non equivale all'angolo fatto dalle proiezioni della retta stessa su di un piano parallelo ad entrambi (*) e tale appunto è nel caso di cui si tratta la misura della reciproca inclinazione delle rette date.

Ciò posto, prendesi su ciascuna delle R_i un punto distante dall'origine di una quantità $\cos i$, e siano $(x_i, y_i, z_i), (x_{i+1}, y_{i+1}, z_{i+1})$ i diversi punti. La loro distanza è $(\cos i \cos i + 1) = \cos i \hat{A}A'$, e se si concepisce una sfera avente il centro nell'origine ed il raggio $\cos i$, si ha

$$x_i = \cos i, y_i = \sin i, x_i^2 + y_i^2 + z_i^2 = 1;$$

$$x_{i+1} = \cos i, y_{i+1} = \sin i, x_{i+1}^2 + y_{i+1}^2 + z_{i+1}^2 = 1.$$

La prima e la seconda rispettivamente danno

$$x_i = \frac{1}{\sqrt{1+\cos^2 i + \sin^2 i}}, y_i = \frac{1}{\sqrt{1+\cos^2 i + \sin^2 i}}, z_i = \frac{1}{\sqrt{1+\cos^2 i + \sin^2 i}};$$

$$x_{i+1} = \frac{1}{\sqrt{1+\cos^2 i + \sin^2 i}}, y_{i+1} = \frac{1}{\sqrt{1+\cos^2 i + \sin^2 i}}, z_{i+1} = \frac{1}{\sqrt{1+\cos^2 i + \sin^2 i}};$$

$$\text{Ma } A'A'' = \sqrt{(x_{i+1} - x_i)^2 + (y_{i+1} - y_i)^2 + (z_{i+1} - z_i)^2} = \cos i \hat{A}A',$$

e sostituendo $\cos i = \cos \hat{A}A'$ per $\cos i$ nella $\hat{A}A'$ (1.ª form. (1)) si ottiene

$$\cos \hat{A}A' = 1 - \frac{1}{2} \left\{ (x_{i+1} - x_i)^2 + (y_{i+1} - y_i)^2 + (z_{i+1} - z_i)^2 \right\} \cos$$

$$\left\{ (x_{i+1}^2 + y_{i+1}^2 + z_{i+1}^2) - (x_i^2 + y_i^2 + z_i^2) + 2(x_i x_{i+1} + y_i y_{i+1} + z_i z_{i+1}) \right\}$$

(*) Un piano parallelo è quello che passa per una delle rette R_i, R_{i+1} e per l'altra parallelamente quodcumque fuerit intersecti in L^2 , e il piano di tale si chiama.

ed

$$\text{Dunque } \cos \hat{A} \hat{B}_2 = \frac{1 - \cos \alpha + b \hat{b}_2}{\sqrt{(1 + a^2 + b^2)} \sqrt{(1 + a_2^2 + b_2^2)}} \quad (10)$$

La retta sarà rettangola quando $\cos \hat{A} \hat{B} = 0$, e ciò dipende dalla condizione

$$1 - \cos \alpha + b \hat{b}_2 = 0 \dots (11)$$

§. 175. Si concepisce un rettangolo rettangolo af ($F:ca$) e si ponga $gh=ab$, $ah=aa$, $ah=1$. Tratte le diagonali ca , ca , cg , ch , ($ca \hat{f}$), si ha del triangolo ach rettangolo in a ,

$$\text{cos} \hat{A} \hat{a} \hat{c} \text{ oia } \cos \hat{A} \hat{x} \left(= \frac{a}{ch} \right) = \frac{a}{\sqrt{(1 + a^2 + b^2)}}.$$

Del triangolo agh rettangolo in g ,

$$\text{cos} \hat{g} \hat{h} \hat{a} \text{ oia } \cos \hat{A} \hat{y} \left(= \frac{b}{ch} \right) = \frac{b}{\sqrt{(a^2 + b^2)}}.$$

Del triangolo ach rettangolo in c

$$\text{cos} \hat{A} \hat{c} \hat{h} \text{ oia } \cos \hat{A} \hat{z} \left(= \frac{a}{ch} \right) = \frac{a}{\sqrt{(1 + a^2 + b^2)}}. \text{ Dunque}$$

$\cos^2 \hat{A} \hat{x} + \cos^2 \hat{A} \hat{y} + \cos^2 \hat{A} \hat{z} = 2$, teor. stabilito.

Facendo $ah=1$ le rispettive formole precedenti si convergono in

$$\frac{1}{\sqrt{(a^2 + b^2 + c^2)}} + \frac{b}{\sqrt{(a^2 + b^2 + c^2)}} + \frac{a}{\sqrt{(1 + a^2 + b^2)}}.$$

Da di esso, per $\cos^2$ le due prime, fatto $a=1$, si trova

$$\text{da } \frac{\cos^2 \hat{y}}{\cos \hat{A} \hat{z}} \quad a = \frac{1}{\cos \hat{A} \hat{z}} \sqrt{(1 - \cos^2 \hat{A} \hat{x} - \cos^2 \hat{A} \hat{y})} \left(= \frac{\cos \hat{A} \hat{x}}{\cos \hat{A} \hat{z}} \right).$$

Dunque dai degli angoli $\hat{A} \hat{x}$, $\hat{A} \hat{y}$, $\hat{A} \hat{z}$, e la specie del $\hat{A}$ hanno per determinare la posizione di una retta $[x=ay, y=bd]$.

ARTICOLO III.

Del piano nello spazio.

§. 174. Sia data (173) la retta

$$[x-x_1=a_1(t-a_1), y-y_1=b_1(t-a_1)] \dots (7)$$

e da $x-x_1=a_1(t-a_1), y-y_1=b_1(t-a_1) \dots (8)$

Se $a_1^2+b_1^2=0$ (172) la 1^a è perpendicolare alla 1^a ; ma eliminando a_1 e b_1 fra l'assoluta ottenuta ed il sistema (8) si ottiene

$$ax+by+c=0 \dots (11)$$

dove $a=bx_1+by_1+c_1$; e dall'equazione, essendo indipendente da a_1, b_1 , si riferisce a tutte le perpendicolari condotte per (x_1, y_1, z_1) alla retta l , ed il sistema di tutte le perpendicolari possibili costituisce un piano: dunque l'equazione (11) è il simbolo di un piano.

Quando $c=0$ il piano passa per l'origine perché all'ipotesi $x=0$ ed $y=0$ corrisponde $z=0$. Prescindendo dall'espressione di a , la costruzione di esso per x o per y dà $x=c$, ordinata all'origine.

Giora alla simmetria ed a qualche ripiego analitico rappresentare il piano con l'eq.

$$Ax+By+Cz+D=0 \dots P$$

Così l'ordinata all'origine è $-\frac{D}{C}$.

L'equazione P determina un punto del piano per mezzo di una proiezione del medesimo.

Le intersezioni di un piano coi piani coordinati diconsi tracce, e si ha l'equazione di ciascuna facendo in quella del piano proposto eguali a zero una dopo l'altra le x, y, z . Così $x=0$ dà $By+Cz+D=0$, cioè la traccia CD' , (F. 15)

dove $\tan \angle D'CA = \tan \frac{\beta}{2}$.

Dall'ipotesi che deriva da come, dal la CD e si ha $\tan \angle DCC' = \tan \frac{\alpha}{2}$.

§. 175. I coefficienti necessari avendo tre, altrettante condizioni bastano per costituire un piano. Dati per es.^a tre punti per cui debba passare, con si ha che da costituirsi la (11) le rispettive coordinate per ottenere tre equazioni analoghe, atte a determinare a, b, c (*).

Un piano è altresì costituito mediante una traccia e l'angolo che fa col piano coordinato su cui la traccia esiste: sia DD' la traccia data

ed $\angle ADD' = \alpha$; per un punto H della DD' si costruiscono le HG, HE , perpendicolari alla DD' , la 1.^a in xy , la 2.^a nel piano CDG , di cui vuole l'equazione per mezzo degli elementi

$$\angle ADD' = \alpha, \angle HGE = \beta, AD = y.$$

Si come $\tan \angle CDA = a$ abbiamo $EG = a$ ed $EG = \tan \beta$, ma due tangenti trigonometriche uguali, in archi disuguali, stanno in ragione inversa de' raggi: dunque

$$a : \tan \beta :: HG (= r \sin \alpha) : DG (= r)$$

ed $\sin \alpha = a \tan \beta \dots (12)$

così trovati $\sin \alpha$ e $\tan \beta \dots (13)$

Per apparenza e s'immagini il punto (x, y, z)

(*) Traduzione di un'altra delle dottrine sopra citate premessa in della dimostrazione, posta alla pagina 108, alla traccia non necessaria: basta per ottenere il piano di cui si tratta dare per il centro che contiene i punti le cui due delle rette che toccano i punti dati, convergono in punto coordinato (vedi nel fasc.)

in I , intersezione delle DE , $D'M$, rispettivamente parallele ad Ay , Ax , e si ottiene risulta

$$x_1 = ax, x_1' = AD \sin \gamma, y_1' = AD \sin \gamma \tan \alpha \sin \gamma,$$

di aver $c = ax + by_1$.

Si ha pure

$\tan \alpha = \frac{c}{b}$ ed eliminando α tra le (14), (15),

$$\tan \beta = \gamma' (a^2 + b^2).$$

§. 176. Il paragone delle tracce

$$\left\{ x = \frac{a}{2} + \frac{c}{2}, y = \frac{a}{2} - \frac{c}{2} \right\} \dots (14)$$

con le analoghe proiezioni

$$\{ x = ax + x_1, y = bx + y_1, \dots \} \dots (15)$$

della retta I , retta d'altitudine perpendicolare al piano (11), dimostra [16] sic. (17): che quando una retta ed un piano sono perpendicolari fra loro, tali per sè sono le tracce dell'uno e le corrispondenti proiezioni dell'altra; e viceversa.

Per assicurarsi della reciprocità necessaria che le tracce (14) determinano il piano individuale (11) (giacchè due rette che s'incontrano equivalgono almeno a tre punti, non tutti in linea retta) e che le proiezioni (15) esclusivamente si riferiscono ad una retta determinata (166).

Estratta l'eq. P alla (11) le tracce (14) si esigono in

$$x = \frac{c}{A} + \frac{B}{A}, y = \frac{c}{A} - \frac{B}{A}.$$

Da ciò affinché un piano P ed una retta R siano perpendicolari dovrà avere

$$\{ A = aC, B = bC \} \dots [VI]$$

e l'equazione del piano perpendicolare ad R è

$$ax + by + cz + \frac{B}{A} = 0.$$

Poiché il piano debba passare per $[x_0, y_0, z_0]$ si esige anche

$$ax_0 + by_0 + cz_0 + \frac{d}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = 0,$$

e sottraendo questa dalla prec. si ritrova l'eq. [11], il che facilmente si spiega. Si ha l'incontro di una retta R e di un piano, determinando x, y, z , mediante il sistema dell'eq. R e [11]; quindi la distanza fra l'incontro suddetto ed il punto $[x_0, y_0, z_0]$ [163] far. (3). Sostituendo $\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}, \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$

per a, b nella formola [10] del § 172, $\hat{R}\hat{P}$ diviene complemento dell'angolo fatto da R col piano, che diremo $\hat{R}'P$. Dunque

$$\text{sen } \hat{R}'P = \frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{\sqrt{(1+a^2+b^2+c^2)} \sqrt{A^2+B^2+C^2}} \quad (16)$$

§ 175. Due piani sono paralleli quando tali sono le loro tracce omologhe su due piani coordinati [Geom.]. Dato un piano P , per determinarne un altro parallelo

$$Ax + By + Cz + D = 0, \dots P$$

si suppone a passare per $[x_0, y_0, z_0]$, deducasi dal confronto delle tracce omologhe

$$(Ax + By + D = 0, Ax + By + D = 0,)$$

$$(By + Cz + D = 0, By + Cz + D = 0,)$$

$$\frac{A}{1} = \frac{A'}{1} = \frac{C}{1}, \text{ cioè } \left\{ A' = \frac{A'}{1}, C' = \frac{C'}{1} \right\} \dots [VII]$$

che dà un piano parallelo a P tale

$$\frac{A'}{1} [Ax + By + Cz] + D' = 0, \text{ cioè}$$

$$Ax + By + Cz + D' = 0, \text{ dove } D' \left(= \frac{A'D'}{1} \right)$$

è indeterminato. La differenza dell'eq.

$$\frac{P}{2} [Ax + By + Cz] + D' = \alpha,$$

$$\frac{P}{2} [Ax_1 + By_1 + Cz_1] + D' = \alpha$$

di quella del piano richiesto, cioè

$$Ax + By + Cz - (Ax_1 + By_1 + Cz_1) = 0 \dots (2)$$

Eccola la costruzione. Se si conoscessa il piano richiesto NN' (Fig. 24) tirando pel dato punto P la parallela ad NN' , questa sarebbe nell'ammesso piano, ed incontrerebbe la traccia NN' in un punto Q' , situato nel piano orizzontale condotto per P . Dunque

$Q'Q$ parallela ad NN' e PP' parallela ad NN' (due per P ad NN').

Quindi $Q'P$ parallela a $Q'Q$ e però ad NN' . Fin qui l'analisi. Invertendo l'ordine si tira per P' , proiezione orizzontale di P , la parallela ad NN' ; il punto Q in cui essa incontra Ax è noto, perchè $Q'P = PP'$; per Q si conduce la $N'N$ parallela ad $M'M$, pel punto N dove essa incontra Ax , la NN' parallela ad $M'M$, e si avrà (2).

§. 178. Se R è parallela a P , la retta $[x = \alpha, y = \beta]$ parallela ad R , coincide col piano $Ax + By + Cz = 0$ parallela a P , e la risultante $(\alpha A + \beta B + Cz) = 0$, che si ottiene eliminando x ed y , dai riferiti ai valori di x comuni alla retta $[x = \alpha, y = \beta]$ ed al piano $Ax + By + Cz = 0$; ma il α di tali valori è indefinito e la risultante suddetta, necessariamente di 1.^o grado, non

14

(2) La retta risultante di due piani per (x_1, y_1, z_1) coincide colla stessa retta, ma i coefficienti D' e D , rimangono ed sono indeterminati.

può darne che una: d'altronde non v'è ragione per cui ella ne porga più volte una che un'altra; dunque non può darne alcuna, e dee comparire sotto una forma insignificante, qual è $0 = 0$, e perciò deve avere $aA + bB + cC = 0 \dots$ (VIII).

Tal è il criterio del parallelismo tra una retta ed un piano.

§. 193. Per un punto dell'intersezione de' piani P, P' si concepiscano le rette R, R' , cioè

$$\left. \begin{aligned} x = az + \alpha \\ y = bz + \beta \end{aligned} \right\} \quad \left. \begin{aligned} x = a'z + \alpha' \\ y = b'z + \beta' \end{aligned} \right\}$$

perpendicolari ai rispettivi piani suddetti, e tali per conseguenza [176] che sia

$$A = aC, B = bC, A' = a'C', B' = b'C'.$$

Fatta la sostituzione nella formula [10] del §. 192,

relativa ad R, R' , angoli equivalenti [Geom.]

a P, P' , si ha

$$\cos P.P' = \frac{AA' + BB' + CC'}{\sqrt{(A^2 + B^2 + C^2)}\sqrt{(A'^2 + B'^2 + C'^2)}} \quad (13)$$

$$\text{Se } AA' + BB' + CC' = 0 \dots \text{ [IX]}$$

i piani s'intersecano ad angolo retto e vice-

Affinchè i due piani procedenti ed. no s'

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$$

non' ortogonali deve avere

$$AA_1 + BB_1 + CC_1 = 0$$

$$AA_2 + BB_2 + CC_2 = 0$$

$$AA_3 + BB_3 + CC_3 = 0.$$

Qualora P' coincida con xy è $D=0, z=0$,

e perchè l'eq. risultante $A_1x + B_1y = 0$ dee verificarsi qualunque sieno x, y , risulta $A_1=0, B_1=0$,

$$\text{e } \cos P' = \frac{C}{\sqrt{(A^2 + B^2 + C^2)}}.$$

$$\text{Dunque} \quad \begin{cases} \cos P_{\frac{A}{B}}^{\frac{A}{B}} = \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} \\ \cos P_{\frac{A}{C}}^{\frac{A}{B}} = \frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} \end{cases}$$

e però $\cos.^{\frac{A}{B}} P_{\frac{A}{B}}^{\frac{A}{B}} + \cos.^{\frac{A}{B}} P_{\frac{A}{C}}^{\frac{A}{B}} + \cos.^{\frac{A}{B}} P_{\frac{A}{B}}^{\frac{A}{B}} = 1$, (18)
come [175]. Infatti, se per l'origine si conduce
un piano parallelo a P e poi una perpendicola-
re allo stesso piano P , i rispettivi angoli

$P_{\frac{A}{B}}^{\frac{A}{B}}$, $P_{\frac{A}{C}}^{\frac{A}{B}}$, $P_{\frac{A}{B}}^{\frac{A}{B}}$, coincidono con quelli che la
perpendicolare fa con Ax , Ay , Az .

Fatta S_{proy} e S_{orig} la proiezione di una fig.
piana S in xy , proiezione che diciamo P , (*)
Dunque

$$S^2 (\cos.^2 \theta + \cos.^2 \psi + \cos.^2 \varphi)$$

ossia $S^2 = P_x^2 + P_y^2 + P_z^2$, vale a dire

TEO. Che il quadrato di una figura piana
(cioè del α ,² esprime quanto vasta di misu-
ra essa contiene) eguaglia la somma de' quadrati
delle sue proiezioni su tre piani rettangoli.

CAPITOLO V.

Teoria de' poligoni rettilinei.

La teoria de' Poligoni rettilinei è uno de' più
eleganti e fecondi rami della Geometria elemen-
tare, ed esclusivamente costituisce una semplice
e diretta introduzione alla Geometria trascenden-
te.

(*) Infatti questa è la proje. di una retta e dell'angolo che questa
fa col xy del piano, ed S può riguardarsi come un caso di line-
reale. (Vegg. la del Cal. T. II. §. Due.)

te e sublime quindi è che di proposizioni di trattare in questo luogo, ma per non oltrepassare i limiti prescritti all'indole ed all'estensione del presente libro, ci restringiamo alle sole azioni che meno si discostano dalla idea di un Elemento. Chi desidera una più ampia discussione può consultare la memoria citata (pag. 185.)

ARTICOLO I.

Nozioni, e formule fondamentali.

§. 180. Essendo $a, x, y, \dots, n$ (n aff.) una serie di punti contenuti in un data piano, ed x, y le coordinate di uno, il sistema di tutti gli suddetti punti, e perciò il poligono avente in essi i rispettivi suoi vertici, resta determinato per mezzo di due equazioni della forma

$$[x\alpha f(x), y\alpha\phi(x)]$$

equazioni il cui 1.^o membro equivale al termine generale di una data serie e si spiega in

$f\frac{x}{\alpha}, \phi\frac{x}{\alpha}$, quando il numero α de' suoi componenti il poligono è assegnato, nel qual caso α indica uno de' numeri $1, 2, 3, \dots, m$.

È chiaro che in $f\phi$, debbono comparire, con le circostanze le opportune, gli elementi di posizione, come, per esempio, le coordinate del centro di un poligono regolare; e che vi si debbono trovare altresì le rette caratteristiche, cui si dà il nome di parametri, qual è il raggio del poligono sopra indicato.

§. 181. Quando il sistema de' punti è ristretto non si può continuare il progresso da un vertice all'altro senza ripassare per uno stesso vertice; tale è dunque che si debbono incontrare due

coordinate y_{n+1}, x_{n+1} , coincidenti con y_n, x_n , e ciò suppone l'esistenza di un numero l che verifichi l'equazione

$$f(n+l) = f(n), \quad \phi(n+l) = \phi(n),$$

indipendentemente dal valore di n . Si elidano dunque n , e se la risultante ha qualche risolvibile reale intera, il sistema sarà ricorrente, cioè composto di un finito numero di termini. L'anzidetta equazione finale in x, y , si riferisce a tutti i vertici, qualunque ne sia il numero, e perciò rappresenta la curva circonscritta al poligono, che supponiamo di m lati e diciamo m -tesima (m°): curva che se abbiasi il sistema

$$\left\{ x = \gamma \cdot \frac{n}{m}, y = \phi \cdot \frac{n}{m} \right\}$$

si ottiene con fare $m = \infty$, perchè si avverta che una quantità della forma $\frac{n}{m}$ equivale ad una variabile finita.

§. 186. Passando alla ricerca delle principali formule, giova osservare primariamente che per esprimere la situazione della diagonale, condotta per la vertici $(x_n, y_n), (x_{n+l}, y_{n+l})$, si ha (185) l'equazione

$$y - y_n = \frac{y_{n+l} - y_n}{x_{n+l} - x_n} (x - x_n) \dots (\text{eq. di una diagonale})$$

Essa diviene quella di un lato quando $l = m$, e per comodo si fa

$$y_{n+l} - y_n = l y_n - l y, \quad x_{n+l} - x_n = l x_n - l x,$$

onde $1 \dots y - y_n = \frac{l y_n}{l x_n} (x - x_n) \dots (\text{eq. di un lato } L_n)$

(1) In caso di poligono di m angoli, che significa linee di m lati, angoli di m angoli.

dove per $\frac{\partial L}{\partial x} (= \frac{\partial u}{\partial x})$ si può sostituire $\tan \theta_n$, essendo θ_n l'angolo fatto con Ax dal prolungamento del lato L_n .

Notasi che dall'equazione $\frac{\partial L}{\partial x} = \tan \theta_n$ deriva

$$\cos \theta_n \left\{ \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2}} \right\} = \sqrt{\left(\frac{\partial L}{\partial x} \right)^2 + 1} \text{ e si avrà}$$

$$\text{II} \dots \cos \theta_n \sqrt{1 + \frac{\partial x^2}{\partial y^2}} \dots \text{(espress. della seg.)}$$

$$\text{III} \dots \rho \cos \theta_n \frac{\partial x}{\partial y} \dots \text{(espress. della rettoang.)}$$

$$\text{IV} \dots L_n = \sqrt{(\partial x_n^2 + \partial y_n^2)} \dots \text{(espress. del lato } n^{\text{mo}})$$

Denot. α_n l'angolo fatto dai lati L_n, L_{n+1} , e λ il suo supplemento, e si scrive

$$\alpha_n = \pi - \lambda_n, \tan \theta_n - \tan \theta_{n+1} = \tan \lambda_{n+1}, \text{ si avrà}$$

$$\text{V} \dots \alpha_n = \pi - \theta_{n+1}.$$

All'estremo α del lato L_{n+1} si tira la perpendicolare a si prolunga finchè incontri Ax in r . I triangoli simili $opr, \alpha n - 1, \alpha$, danno

$$\text{VI} \dots \rho \cos \theta_n \frac{\partial y}{\partial x} \dots \text{(tangente.)}$$

$$\text{VII} \dots \sec \theta_n \sqrt{1 + \frac{\partial y^2}{\partial x^2}} \dots \text{(normale.)}$$

§ 183. Un principale oggetto della teoria dei poligoni consiste il conseguimento dell'equazione che ne costituisce la posizione e la specie, e giovando medesimamente nelle analitiche indagini di cui ha dato sotto una delle più semplici forme, è necessario procurare i mezzi od'effettuare alla necessità, con facilità e precisione qualunque

trasformazione dell'origine e degli assi. Ognuno
deve rammentare quanto ci è stata opportuna

l'equazione $y = \tan \alpha \cdot x + b$ della linea retta (α)

in presenza della generalissima $y = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} x + b$,

che ottenesi rapportando la retta a due assi obliqui,
e supponendo l'origine fissi della retta stessa.

Sieno At , At' (F ed af) i nuovi assi
 $AN(-\alpha)$, $AN'(-\alpha)$ le nuove coordinate: condot-
tasi NQ perpendicolare, Nt parallela ad At ,
e si scrive

$$\left. \begin{aligned} At &= \cos \alpha \cdot x, \quad Nt' = QF = \sin \alpha \cdot x, \\ NQ &= \cos \alpha \cdot y, \quad At' = \sin \alpha \cdot x, \end{aligned} \right\} \text{ si avrà}$$

$$\left. \begin{aligned} x &= \cos \alpha \cdot x + \sin \alpha \cdot y \\ y &= \sin \alpha \cdot x + \cos \alpha \cdot y \end{aligned} \right\} \dots \text{ VIII}$$

dove α , β sono le coordinate della nuova origine.

Cambiando il solo asse At in At' e l'origine

si ha $x = \frac{1}{\cos \alpha}$ ed

$$\left\{ \begin{aligned} x &= \cos \alpha \cdot x + \sin \alpha \cdot y \\ y &= \sin \alpha \cdot x + \cos \alpha \cdot y \end{aligned} \right\} \dots \text{ IX}$$

dove fissi sono in l'origine vecchi in At ; β sono
in At' . Per ordinario si preferiscono le x , y
rettangoli come le x , y , ed in tale ipotesi il si-
stema VIII si riduce ad

$$\left\{ \begin{aligned} x &= \cos \alpha \cdot x + \sin \alpha \cdot y \\ y &= \sin \alpha \cdot x + \cos \alpha \cdot y \end{aligned} \right\} \dots \text{ X}$$

La trasformazione inversa, quella cioè per cui si
passa dalle coordinate oblique alle rettangole, si

effettua deducendo dal rispettivo sistema x ed y in x ed y . Per fare un ipotesi che si sarà utile, suppongo eseguita la trasformazione

$$x = \cos \alpha \cdot x' + \sin \alpha \cdot y', \quad (1) \quad y = -\sin \alpha \cdot x' + \cos \alpha \cdot y', \quad (2)$$
 la quale non è altro che un caso particolare del sistema VIII, e vogliamo reintrodurre all'equazione in x ed y .

Deducasi $(1) \cos \alpha \cdot x' - (2) \sin \alpha \cdot x'$, indi
 $(1) \sin \alpha \cdot x' - (2) \cos \alpha \cdot x'$ e si avrà

$$x' = \frac{\cos \alpha \cdot x - \sin \alpha \cdot y}{\cos (\alpha - \alpha)}, \quad y' = \frac{\sin \alpha \cdot x + \cos \alpha \cdot y}{\cos (\alpha - \alpha)}.$$

ARTICOLO II.

De' Poligoni in generale.

§. 184. Essendo $(F: xy)$ ap, bq, cr , perpendicolari ai rispettivi lati di un triangolo, e l'intersezione delle ap, bq , i cerchi condotti per a, p, q, d ; per b, p, q, e , dimostrano

$$pa \cdot qa \cdot pb \cdot pc = \frac{1}{2} r \cdot abc,$$

vale a dire che ad prolungata incontra bq ad angolo retto: dunque

Teor. 1.^a Le perpendicolari dal vertice su i lati di un triangolo s'incontrano in una stessa punto.

§. 185. Sia il trapezio $abcd$ $(F: ab)$ dove il lato B si suppone parallelo al lato D , e condotta ac parallela a C si avrà de' triangoli abc, abc

$$B^2 = A^2 - B^2 = a \cdot A \cdot bc \cdot b,$$

$$C^2 (\cos^2 \alpha) = a \cdot A^2 - (B - D)^2 = a \cdot A \cdot (B - D) \cos \beta.$$

Dalla 1.^a $\times (B - D)$ si toglia la 2.^a $\times B$ e si avrà

$$B^2 = [BC^2 - A^2 D + BD(B - D)] (B - D);$$

Così $B^2 = [A^2 B - C^2 D + BD(B - D)] (B - D).$

E però $E^2 + F^2 = A^2 + C^2 + 2BD$; dunque

Teor. 2.^a La somma dei quadrati delle diagonali di un trapezio, eguaglia quella dei quadrati dei lati convergenti, più il doppio rettangolo dei paralleli.

§. 186. Bispetto le diagonali ad, bd ($F: m$) in i , l , sia $EO = h$,

ac($=ae$) $=E$, bd($=ab$) $=F$, $Ob=G$, $Oi=H$ e si avrà

$$A^2 = (E+H)^2 + (F-G)^2 = 2(E+H)(F-G)\cos\theta,$$

$$B^2 = (E-H)^2 + (F-G)^2 = 2(E-H)(F-G)\cos\theta,$$

$$C^2 = (E-H)^2 + (F+G)^2 = 2(E-H)(F+G)\cos\theta,$$

$$D^2 = (E+H)^2 + (F+G)^2 = 2(E+H)(F+G)\cos\theta;$$

quindi

$$\begin{aligned} A^2 + B^2 + C^2 + D^2 &= 4E^2 + 4F^2 + 4(G^2 + H^2 + 2GH\cos\theta) \\ &= (2E)^2 + (2F)^2 + (2G)^2 \quad \text{il che significa} \end{aligned}$$

Teor. 3.^a Che in ogni trapezio la somma dei quadrati dei lati eguaglia quella dei quadrati delle diagonali, più il quadrato della doppia distanza tra punti medi delle diagonali messe.

§. 187. Congiunti i vertici $1, 2, 3, \dots (n-1)$, n di un m^{a} con un punto C di una retta

$CD(=dR)$ ($F: 3a$) esistente nel suo piano, sieno

$$CP_1(=p_1), CP_2(=p_2), CP_3(=p_3), \dots CP_{n-1}(=p_{n-1}), CP_n(=p_n)$$

le rispettive proiezioni delle rette

$C_1, C_2, C_3, \dots C(n-1), C(n)$, sulla retta R .

Avvertasi che la proiezione di A_1 , cioè

$$A_1 \cos A_1 \overset{A}{R}, \text{ equivale a } CP_n - CP_1(=p_n - p_1); \text{ che}$$

la proiezione di $A_2(=A_2 \cos A_2 \overset{A}{R})$ coincide con $CP_2 - CP_1(=p_2 - p_1)$; e, sino alla proiezione di

$$A_n(=CP_1 - CP_n = p_1 - p_n), \text{ e siccome}$$

$p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 + p_6 + p_7 + p_8 + p_9 + p_{10} + p_{11} + p_{12} + p_{13} + p_{14} + p_{15} + p_{16} + p_{17} + p_{18} + p_{19} + p_{20}$
 è identicamente zero, si raccogliendo amsi identiche l'equazione

$$A_1 \cos A_2 \hat{B} + A_2 \cos A_3 \hat{B} + A_3 \cos A_4 \hat{B} + \dots + A_n \cos A_n \hat{B} = 0,$$

dove

Teor. 4.^a Che la somma delle proiezioni del lato di un n° , sopra una retta data nel suo piano, è zero (*).

Es. 188. Condotta da un punto P (Fig. 188) nel piano di un dato n° le rette $\hat{b}_1, \hat{b}_2, \dots, \hat{b}_n$ ai vertici $a_1, a_2, \dots, a_n$, ed al punto medio dei lati $A_1, A_2, \dots, A_n$ le rette $a_1, a_2, \dots, a_n$, si ha

$$\hat{b}_1^2 = \frac{1}{2} A_1^2 + a_1^2 - a_1 A_1 \cos \hat{b}_1$$

$$\hat{b}_2^2 = \frac{1}{2} A_2^2 + a_2^2 - a_2 A_2 \cos \hat{b}_2 = \frac{1}{2} A_1^2 + a_2^2 - a_2 A_1 \cos \hat{b}_2$$

$$\hat{b}_3^2 = \frac{1}{2} A_3^2 + a_3^2 - a_3 A_3 \cos \hat{b}_3 = \frac{1}{2} A_2^2 + a_3^2 - a_3 A_2 \cos \hat{b}_3$$

$$\hat{b}_4^2 = \frac{1}{2} A_4^2 + a_4^2 - a_4 A_4 \cos \hat{b}_4 = \frac{1}{2} A_3^2 + a_4^2 - a_4 A_3 \cos \hat{b}_4$$

$$\dots \dots \dots$$

$$\text{Quindi} \quad \hat{b}_1^2 + \hat{b}_2^2 - 2a_1^2 = \frac{1}{2} A_1^2,$$

$$\hat{b}_2^2 + \hat{b}_3^2 - 2a_2^2 = \frac{1}{2} A_2^2,$$

$$\hat{b}_3^2 + \hat{b}_4^2 - 2a_3^2 = \frac{1}{2} A_3^2,$$

$$\dots \dots \dots$$

(*) Questo (Cron. de Paris 2. 1881) è partito da un principio inamovibile, cioè che un vertice preso qualunque come un baricentro, un poligono, per esempio, può che considero come un cerchio. Si si potrebbe dimostrare perché un tale vertice del poligono ha il privilegio di non si muove.

$$b_{n-1}^2 + b_n^2 - ab_{n-1}^2 = \frac{1}{2} A_{n-1}^2,$$

$$b_n^2 + b_{n+1}^2 - ab_n^2 = \frac{1}{2} A_n^2; \quad \text{e sommando:}$$

TEOR. 5.^o

$$b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + \dots + b_n^2 - (ab_1^2 + ab_2^2 + ab_3^2 + \dots + ab_n^2) = \frac{1}{2} (A_1^2 + A_2^2 + A_3^2 + \dots + A_n^2)$$

§. 189. Trasportando P ad una distanza h del piano dell' $m.$ ^{te}, il quadrato di ciascuna delle P e delle a si scinde in h^2 parti:

TEOR. del conto PAPPUS. La differenza tra la somma dei quadrati delle rette, che uniscono un punto dello spazio coi vertici di un $m.$ ^{to}, e la somma dei quadrati di quelle che dal predetto punto vanno alle basi de' lati, equivale al quadrato della somma de' lati, levatali ciascuno al quadrato: (*)

ARTICOLO III.

De' Poligoni circoscrivibili e degli inscritti al circolo.

§. 190. Dalla formula $r = \frac{abc}{4P}$ (§. 145 nota) che anche la Circonferenza speditamente sostituita (**)

(*) Il *Matematico Autore* dimostra (Op. II. II.) che il sen. a coincide cogli seni a opposti a $defrac.$, e quello $defrac.$ coi vertici con $defrac.$ fatta la sua parte.

(**) I segni abc sono $AB.C$, BCA , CAB (§. 145) rappresentati

$$AB.C = AC.BC$$

e moltiplicando per AB l'equazione $BC.AB = AB.AC$ si trova $AB.BC.AB = AC.AB.AC$ con AB moltiplicando.

TEOR. 6.^a Due triangoli inscritti in uno stesso circolo stanno come i prodotti de' loro lati rispettivi, e se questi prodotti sono eguali, stanno in ragione inversa de' raggi del circolo circoscritto.

§. 191. Inscrivete il circolo ad un triangolo e condotte il raggio r'' a ciascun vertice, si ha

$$S = \frac{1}{2}(A+B+C)r'' = 3pr''$$
; perciò

TEOR. 7.^a Due triangoli circoscritti ad un circolo stanno come i loro perimetri; e se hanno il perimetro uguale stanno come i raggi del circolo circoscritto.

§. 192. Dicasi ar_1 l'arco sotteso da' lati A_1, A_2 di un sm.° ; ar_2 quello ch'è sotteso da A_1+A_2 , ec. e si avrà

$$\overset{\Delta}{A_1} \cdot \overset{\Delta}{A_2} = r_1^2; \overset{\Delta}{A_1} \cdot \overset{\Delta}{A_3} = r_1^2 r_2; \overset{\Delta}{A_2} \cdot \overset{\Delta}{A_3} = r_1^2 r_2; \dots$$

e perciò

$$\overset{\Delta}{A_1} \cdot \overset{\Delta}{A_2} + \overset{\Delta}{A_1} \cdot \overset{\Delta}{A_3} + \overset{\Delta}{A_2} \cdot \overset{\Delta}{A_3} + \dots + \overset{\Delta}{A_{n-1}} \cdot \overset{\Delta}{A_n} = r_1^2 (r_2 + r_3 + \dots + r_n)$$

Ma $ar_1 + ar_2 + \dots + ar_n = \text{perim.}$ dunque

TEOR. 8.^a In un sm.° inscritto la somma degli angoli interni alternati è $=(n-1)\pi$.

§. 193. Chiamando r', r'' ec. gli archi sottesi da rispettivi lati A_1, A_2 ec. risulta

$$r = \frac{1}{2}A_1 :: 1 :: \sin \frac{1}{2}r; r + r' = \frac{1}{2}A_2 :: 1 :: \sin \frac{1}{2}r';$$

ec. quindi

$$A_{n-1} : A_n :: \sin \frac{1}{2}r^{n-1} :: \sin \frac{1}{2}r^n,$$

e però

TEOR. 9.^a Due lati contigui di un poligono inscritto stanno fra loro come i seni de' rispettivi angoli che sottendono.

§. 194. Considerando la rispettiva eguaglianza de' seni di due lati contigui di un sm.° circoscritto si scopre.

Teor. 10.^a Che in un *ma*^{re} circoscrittibile la somma de' lati alternati è uguale.

§ 195. Congiungendo i vertici di un *ma*^{re} col centro del circolo inscritto, e prolungando ciascuna trigono col settore corrispondente, per es.^o (F. 34) CBD con CbA, si scuopre essere tri. CBD-sett. CbA::BD:Ab, dunque

Teor. 11. Un *ma*^{re} ed il circolo inscritto stanno come i loro perimetri.

§ 196. Descomponga un *ma*^{re} circoscrittibile che ha due in se piramidi, avendo il vertice nel centro e si verificherà.

Teor. 12.^a Che un *ma*^{re} e la sfera inscritta stanno come le loro superficie.

Questa teorema presenta nell'arte una semplicità uno de' più nobili principj geometrici, perchè sostituendo il cilindro all'*ma*^{re} ottiene il celebre teor. di Archimede, e se si sostituisce il cono incontrasi quello del P. Tacquet, fare non meno elegante e propale. (*)

§ 197. Supponiamo che un *ma*^{re} m il cui perimetro p , sia iscritto al circolo, e che alla stessa *ma*^{re} sia iscritto un circolo c' , si ha (194)

$$m:c'::p:\text{circumf. } c'$$

Ma se fosse $m:c::p:\text{circumf. } c$, risulterebbe

$$m=\frac{c'p}{\text{circumf. } c'}=\frac{cp}{\text{circumf. } c}, \text{ cioè}$$

$$c':c::\text{circumf. } c':\text{circumf. } c$$

e tal rapporto è falso: dunque

Teor. 13.^a Un circolo ed un *ma*^{re} iscritto non

(*) E questo teorema esiste, non solo applicato negli elementi, come del P. Gergonne, Poisson, ma anche finché alla base della Matematica di Bruni.

lunghi come i loro perimetri se all' m.^a siano circoscrivibile.

§. 198. Posto che un m.^a M ha cui superficie P , sia inscritta alla sfera S , e che alla stessa m.^a sia inscritta una sfera S' , si ha (§ 96)
 $M : S' :: P : \text{superf. } S$: ma in sfera

$$M : S :: P : \text{superf. } S, \text{ quindi}$$

$$M = \frac{SP}{\text{superf. } S} = \frac{S'P}{\text{superf. } S}, \text{ cioè}$$

$$S : S :: \text{superf. } S' : \text{superf. } S$$

e tale rapporto è falso: dunque

TEOR. 14.^a Una sfera ed un m.^a inscritto non hanno come le loro superficie, se le stesso m.^a sia circoscrivibile.

ARTICOLO IV.

De' Poligoni simili e de' paralleli.

§. 199. Posto l'origine in un vertice A comune a due m.^a (P^1 Q^1) se le coordinate x, x_1, y, y_1 de' vertici m.^a R, s stanno nelle stesse rapporti, esse si abbia

$y_1 = ay, x_1 = ax$, e però $dy_1 = a dy, dx_1 = a dx$ (*) risulta

$$V'(dy^2 + dx^2) = aV'(dy_1^2 + dx_1^2) \dots (a) \text{ ed } L = aL.$$

(*) Supponendo che nel teorema 198, dove a, b sono quantità costanti, la y abbia una qualunque equazione per dy , e sia la differenza tra i termini sempre od di primo, o di 2.^a $dy_1 = ay$, $dx_1 = ax$, $dy_1^2 = a^2 dy^2$. Per ridurci ad dy alla funzione primitiva, della cui variabile il termine dy può essere derivato, si suppone $dy = a$. Aggiunge ad dy una costante b che può essere quante volte desiderasi nella differenza.

$$\text{Sia} \quad \dot{L}x = b, \quad \dot{L}x' = b',$$

$$\text{quindi } B\dot{A}W(x_2) = r \cdot b, \quad B\dot{A}W(x'_2) = r \cdot b',$$

$$\text{e siccome} \quad \begin{cases} \tan \alpha_2 = \tan b = \frac{dy}{dx}, \\ \tan \alpha'_2 = \tan b' = \frac{dy_1}{dx_1} = \frac{dy}{dx}, \end{cases}$$

si avrà $\tan \alpha_2 = \tan \alpha'_2$, $\alpha_2 = \alpha'_2$; e gli angoli proposti, in forza del sistema $\{L, \alpha, \alpha', x, x'\}$ saranno uguali.

§. 200. Per rintracciare l'equazione degli angoli uniti ad un'curve dato si faccia $b, \cos = x$ e deducasi

$$\tan b_1 \cos b = \frac{dy_1}{dx_1} = \frac{\tan b + \tan x}{1 - \tan b \tan x};$$

Nel quadrato dell'equazione (a) si sostituisce l'espressione di dy_1 , dedotta dalla pona, e si avrà

$$\frac{dx_1^2 (1 - \tan^2 b)(1 - \tan^2 x)}{(1 - \tan b \tan x)^2} = \cos^2 b (1 - \tan^2 b),$$

equazione, che soppresso il fattore comune e po-

sto $\frac{1}{\cos^2 b}$ per $1 - \tan^2 b$, si riduce a

$$dx_1 = \cos \alpha' (1 - \frac{\tan b \tan x}{\cos b \cos x}) dy, \quad \text{ovvero}$$

$$dx_1 \left[= \frac{\cos (b+x) dx}{\cos b} = (\cos x - \sin x \tan b) dx = \cos x (1 - \tan b \tan x) dx \right]$$

facendo

$$dy_1 \left[= dx_1 \frac{(\tan b + \tan x)}{1 - \tan b \tan x} = \cos \alpha' (\tan b + \tan x) dx \right]$$

$$\text{cioè} \quad dy_1 = \alpha' (\cos x \tan b + \cos x) dx.$$

Non resta che sostituire $\frac{\partial T}{\partial x}$ in vece di $\tan i$ per avere

$[dy_1 = \cos(\cos a dx - \cos a dy), dy_2 = \sin(\sin a dx + \cos a dy)]$ sistema, che mediante il regresso delle differenze alle variabili primitive, (199. Nota) dà quelle che si richiedo, cioè

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= \cos(\cos a x - \cos a y) + c \\ y_1 &= \sin(\sin a x + \cos a y) + c' \end{aligned} \right\} \dots \dots 1$$

dove il valore delle costanti c, c' , dipende dalla situazione del vertice omologo del poligono iniziale, in cui si suppone collocata l'origine delle coordinate.

§. 304. Per rendere più semplice e chiaro il proc. sistema I fa d'uopo limitare l'estensione con qualche addestra ipotesi:

Ipot. 1.^a Che ridotta l'origine al punto comune A , dove $a=c=0$, sia $x(\cos b, -b) = \frac{1}{2}r$:

Ipot. 2.^a Che sia $\cos \frac{1}{2}r$.

Ipot. 3.^a Che sia $a=0$ e $c'=0$, in cui il sistema prende opportunamente la rispettiva forma che segue

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= -xy, & y_1 &= \sin x \\ x_2 &= \cos a \cos \frac{1}{2}r(x-y), & y_2 &= \cos a \cos \frac{1}{2}r(x-y) \\ x_3 &= \sin x + c, & y_3 &= \sin y. \end{aligned} \right\}$$

§. 305. Nella 3.^a, che suppone i lati omologhi paralleli, giova investigare se gli addetti lati possano tutti essere egualitanti.

Prolungati sino ad $Ax''(F, \frac{1}{2}b)$ i lati omologhi paralleli AN, an , la cui distanza è $\cos d$, si ha

$$QF = QP - AP - (AP - A_P) (= \phi A) = \frac{r_1 x}{\frac{1}{2}r} - x - \left(\frac{r_1 \frac{1}{2}x_1}{\frac{1}{2}r_1} - x_1 \right)$$

e perchè $x_1 = (1-a)+c$, $y_1 = -cy$,

$$Q_1 = \frac{y_1^2}{2y} = x - (cy)^2 \frac{2x}{2cy} = x - c =$$

$$(y^2 \frac{y^2}{2y} - x^2)(1-a) + c = Q_1 A(1-a) + c.$$

La distanza $d(=Q_1 \frac{2x_1 y_1}{1})$ essendo una funzione

variabile, che non può esserle per alcune particolari valori di x , ripassa che un generalizzante $dA=c$, cioè che i lati analogi di due poligoni simili abbiano tutti tra loro la stessa distanza: dunque

TEOR. 15.^a Due poligoni, quantunque simili, non possono essere paralleli: bi osservasi il caso ben noto della Geom.^a, che i poligoni sono regolari; osservasi che a suo luogo potrà dimostrarsi anche dall'analisi, sostituendo nell'espressione di Q_1 il corrispondente valore di x, y , ed osservando che $c=1-a$ riduce a zero l'andamento seno-ante.

ARTICOLO V.

De' Poligoni regolari e degli spirali.

§. 123. Il poligono regolare, che si sa essere una figura rientrante di lati ed angoli eguali, ammette alcune sostanziali modificazioni, che talvolta si conoscono istintivamente.

Il poligono regolare detto astrifere quando equivale ad un sistema di corde circolari concentriche, tutte uguali fra loro, ma tali, che l'an-

co settore da ciascuna non sia una parte aliquota della circonferenza. (*)

Si circoscrive un poligono regolare inscritto proponendolo un poligono regolare, e disegnando cinque rette eguali e parallele ai lati alternati.

§. 104. Sia (F. 55.) $\overline{m-1}, \overline{m-1}, m, 1, 2, 3, \dots$ parte di un arco regolare, C il suo centro, $\hat{C}_m$ un angolo interno, e prolungate il lato $\overline{m-1}, m$ in i , si tiri Ch_1 perpendicolare sul lato $1, m$. Si chiama

$$1\hat{C}_m = \frac{2\pi}{m}, \quad C1m + C\hat{C}_m = \hat{C}_m,$$

ed il rispettivo supplemento d'archi i membri della 1^a è $1\hat{C}_m$, $1mi$, si ha

$$1mi(m\hat{C}_m) = \frac{\pi}{m} \text{ e però } \hat{C}_m = m\frac{\pi}{m}.$$

Quindi $m\hat{C}_1 : Cm(-r) :: \text{sen.} \frac{\pi}{2} : 1\hat{C}_m(-m\frac{\pi}{m})$; e

$$\text{ed } f_1(-m\hat{C}_1) = r \text{ sen.} \frac{\pi}{m} \dots (\beta)$$

Deducendo $r = \frac{f_1}{\text{sen.} \frac{\pi}{m}}$ si ottiene il raggio Ch_1

del circolo inscritto

$$R \left[-\frac{f_1}{\text{sen.} \frac{\pi}{m}} \frac{1}{1} \text{sen.} \frac{\pi}{m} \right] = f_1 \text{sen.} \frac{\pi}{m} \left[-\left[f_1 \text{sen.} \frac{m-1}{m} \pi \right] \right]$$

(*) Il poligono iscritto è propriamente una figura ambiguita: il prolungamento del lato angoli consecutivi non coincide spesse volte, figurando un lato con linea in quella che non corrisponde esattamente uguale a lui e gli angoli alternati.

e la superficie $S[\cos(\frac{\pi}{m}), \cos(\frac{\pi}{m})] = \frac{m}{4} r_1^2 \cos(\frac{\pi}{m})$.

Il lato L_1 del triangolo m -o circoscritto avendo

$$\cos(\frac{L_1}{2r_1})^{(*)}, \text{ si trova la sua superficie}$$

$$S[\cos(\frac{L_1}{2r_1}), \cos(\frac{L_1}{2r_1})] = \frac{m}{4} \frac{r_1^2}{\cos(\frac{\pi}{m}) \cos(\frac{\pi}{m})}.$$

Quindi $S = \frac{m}{4} r_1^2 \cos(\frac{\pi}{m})$ ed $S = \frac{m}{4} r_1^2 \cos(\frac{\pi}{m})$.

e ricavando $\cos(\frac{\pi}{m})$ dall'equazione $L_1 = 2r_1 \cos(\frac{\pi}{m})$,

$$S = \frac{m}{4} r_1^2 \cos(\frac{\pi}{m}) = \frac{m}{4} r_1^2 \cos(\frac{\pi}{m}).$$

Si fanno che l'altro de' rapporti

$$1 : \cos(\frac{\pi}{m}) : \frac{r_1^2}{4} : \frac{r_1^2}{4} : \frac{r_1^2}{4},$$

d'altronde notabili per la loro semplicità, subito suggeriscono che il triangolo isoscele, il quadrato, l'esagono regolare ecc. stanno alle dicte figure circoscritte come $1 : \frac{1}{4} : 1 : \frac{1}{4} : 1 : \frac{1}{4}$ ecc. ed i due primi de' precedenti rapporti hanno il pregio di estendersi alle figure irregolari. ^(**) Ecco un facil metodo per costruire il valore di S , qualunque sia il numero intero espresso per m .

Descritto un circolo col centro in uno de' vertici, B per es. (Fig. 15) e col raggio BS , si tiri il raggio QS , e così BS il lato di un m -o inscrittibile al predetto circolo, simile ai due proposti e tale ch'egualia la loro differenza.

(*) Basta prolungare OS_1 finché toccherà la tangente m , e costruirsi il triangolo fatto dalla tang., da OS_1 e dal prolungamento di OS_1 ; tang. che è uguale a $OS_1 m$.

(**) Vegg. la nota nel fine del Capitolo.

Infatti la differenza richiesta equivale alla somma di m trigoni uguali, $a\hat{B}b, b\hat{C}c$; *ec.* I m ac costruiti è composto di m trigoni uguali $BbI, BbII$ *ec.* e si tratta di provare 1.^o che applicando successivamente sulla concavità del circolo $BFGHI$, m corde uguali alla Bb , ottenesi un poligono inscritto: 2.^o che si ha $\text{trig.} a\hat{B}b = \text{trig.} BbI$.

Siccome $\overset{\frown}{QbB}$ è $\equiv \overset{\frown}{QbI} = \overset{\frown}{QbB}$ si sa (Geom.) che anche $\overset{\frown}{LbB} = \overset{\frown}{BbI}$; per conseguenza gli archi $a\hat{B}, B\hat{I}$ sono simili e però *ec.*

Per verificare la 2.^a proposizione avvertasi che l'uguaglianza de' trigoni $a\hat{B}b, BbI$ (coincidendo la parte comune BbI) dipende da quella de' trigoni $a\hat{B}L, B\hat{I}L$. Or questi, oltre l'angolo retto $a\hat{L}B, b\hat{L}I$, hanno eguali i lati $a\hat{B}, b\hat{I} (= Bb)$; ed i lati $a\hat{L}, b\hat{L}$: dunque *ec.*

§. 265. Condotte le Ch_1, Ch_2 *ec.* perpendicolari alle consecutive diagonali.

$$m\alpha(-d_1), m\beta(-d_2) \text{ *ec.* ottensi}$$

$$m\beta_2/r :: \text{sen.} \frac{2\pi}{m} : r ; \quad m\beta_1/r :: \text{sen.} \frac{2\pi}{m} : r ; \text{ *ec.*}$$

e perciò

$$d_1 = m \text{sen.} \frac{2\pi}{m}, d_2 = m \text{sen.} \frac{2\pi}{m}, \dots, d_m = m \text{sen.} \frac{2\pi}{m} \dots (7)$$

La formula (7), però

$$m\alpha, \frac{m-1}{m} m \text{sen.} \frac{2\pi}{m}, m\beta, \frac{m-2}{m} m \text{sen.} \frac{2\pi}{m}, \text{ *ec.* insegna}$$

Teor. 26.^o Che il numero delle diagonali è $m-3$.

§. 266. Quando m è pari ($=2n$), *ec.* si fa $m=2n$ le citate formule si riduce a $D_1 = m-1$ dunque

Teor. 27.^o In ogni m -*ec.* pol. una diagonale che passa pel centro.

§. 307. Essendo $m=2l+1$ può supporre 251
 $\cos \frac{2l+1}{2}(\pi-i)$ e risulta

$$\frac{2l}{2} = \frac{l}{2}, \quad \frac{2l+1}{2} = \frac{l+1}{2} \pi;$$

Ma $\frac{l}{2} + \frac{l+1}{2} \pi = \frac{2l+1}{2} \pi = \pi$ e però $\frac{l+1}{2} \pi$
 supplém. d' $\frac{l}{2} \pi$; dunque

TEOR. 18.^a In ogni poligono (*) due diagonali consecutive, fra quelle che partono dall'istesso vertice, sono eguali.

Nella prez. ipotesi si ha il valore delle diagonali espresse per $\cos \frac{2l-1}{2} \frac{\pi}{2}$. Basta

osservare che l'ultima termine della progressione $\cos \frac{\pi}{2}$, $\cos \frac{3\pi}{2}$, $\cos \frac{5\pi}{2}$, ..., $\cos \frac{2l-1}{2} \frac{\pi}{2}$,

coincide col seguente $\cos \frac{2l+1}{2} \frac{\pi}{2}$, e inoltre

che gli archi $\frac{(2l-1)}{2} \pi$, $\frac{(2l+1)}{2} \pi$ sono supplementari.

Un elemento che talvolta si vuole necessario è per la formula, esprimente l'angolo, che la diagonale condotta dal vertice principale fa col lato n^{mo} , e tal formula si trova $=(n-1) \frac{\pi}{2}$.

Di fatto (F. 39) $= \frac{1}{2} \pi$, perchè ha per misura il semicircolo sotteso dal lato;

(*) Poligono convesso, d'ogni numero di lati.

$$1. \frac{1}{2} \cdot 3 \cos(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \pi) = \frac{3\pi}{2}; \text{ e } \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 4 \cos \frac{3\pi}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 4 \cos(\frac{1}{2} \pi) = \frac{\pi}{2}.$$

5. Vogliam (Fig. 57) considerar ora parte di un arco regolare riferito agli assi rettangoli $xy, x'y'$ e condurre le ordinate $xy_1 (=x_1)$, $x'y_1 (=y_1)$ ed anche le al. Se ec. perpendicolari alle rispettive x_1, y_1 ec., e siccome

$$x_1 = \cos \frac{\pi}{n}, \quad y_1 = \sin \frac{\pi}{n}, \quad \frac{1}{2} x_1 = \frac{1}{2} \cos \frac{\pi}{n}, \text{ ec.}$$

e di b trovato (104) knowing $\frac{\pi}{n}$, si avrà

$$x_2 = \cos \frac{\pi}{n} \cos \frac{2\pi}{n}, \quad y_2 = \sin \frac{\pi}{n} \left(\cos \frac{2\pi}{n} + \cos \frac{2 \cdot 2\pi}{n} \right), \\ - y_2 = \sin \frac{\pi}{n} \left(\cos \frac{2 \cdot 2\pi}{n} + \cos \frac{1}{2} \frac{2\pi}{n} \right);$$

ed in generale, avendo $\frac{2\pi}{n} = \alpha$,

$$x_n = \cos \frac{1}{2} \alpha \left[\cos \alpha + \cos 2\alpha + \cos 3\alpha + \dots + \cos (n-1)\alpha \right] \\ = r \left[\cos \frac{1}{2} \alpha - \cos \frac{1}{2} (n-1)\alpha \right] \quad (*)$$

$$\text{Così} \quad x_1 \left[-\cos \frac{\pi}{n} \cos \frac{2\pi}{n} \right] = \cos \frac{1}{2} \alpha \cos \alpha,$$

$$x_2 \left[\cos x_2 + x_2' \right] \sin \frac{\pi}{n} \left(\cos \frac{2\pi}{n} + \cos \frac{2 \cdot 2\pi}{n} \right)$$

(*) Per ottenere: $\cos \frac{1}{2} \alpha + \cos \frac{3}{2} \alpha + \cos \frac{5}{2} \alpha + \dots + \cos \frac{1}{2} (n-1)\alpha$ si usano 7 equazioni identiche

$$2 \cos \frac{1}{2} \alpha \cos \alpha = \cos \left(\alpha - \frac{1}{2} \alpha \right) + \cos \left(\alpha + \frac{1}{2} \alpha \right)$$

dove in α per $\alpha + \alpha$... e dunque $\cos \alpha, \alpha, \alpha$ ed α si sommano li reciprocamente, il che dà

$$\cos \left[\cos \left(\alpha - \frac{1}{2} \alpha \right) + \cos \left(\alpha + \frac{2\pi}{n} \right) \right] \cos \frac{1}{2} \alpha \left[\cos \frac{2\pi}{n} + \cos \left(\alpha + \frac{2\pi}{n} \right) \right] \cos \frac{1}{2} \alpha$$

e per sottrazione queste facilmente alla serie precedente, con $\sin \left(\alpha - \frac{1}{2} \alpha \right)$ la d'opra sostituisce $\sin \alpha$ per α .

$$m \cos \alpha \cos \frac{1}{2} \pi (\cos \alpha + \cos \alpha \cos \alpha);$$

si indicando α per Δx_1 , β per Δx_2 , ecc. si ha

$$\alpha_1 = \alpha, \alpha_2 = \beta, \alpha_3 = \gamma, \dots, \alpha_n = \alpha_{n-1}, \quad \text{vale a dire}$$

$$\alpha_1 = m \cos \frac{1}{2} \pi [\cos \alpha + \cos \alpha \cos \alpha \cos \alpha \dots + \cos \alpha (n-1) \alpha]$$

$$= m \left[\cos \frac{1}{2} \pi (n-1) \alpha + \cos \frac{1}{2} \pi \alpha \right].$$

L'equazione dell' m -te regolare viene dunque espressa dal sistema,

$$[y = m \left[\cos \frac{1}{2} \pi (n-1) \alpha \right], x = m \left[\cos \frac{1}{2} \pi (n-1) \alpha + \cos \frac{1}{2} \pi \alpha \right]]$$

Eliminando con $\frac{1}{2} \pi (n-1) \alpha$ e con $\frac{1}{2} \pi (n-1) \alpha$ si ottiene un'equazione priva dell'indice n , cioè

$$(y - m \cos \frac{1}{2} \pi \alpha)^2 + (x - m \cos \frac{1}{2} \pi \alpha)^2 = r^2,$$

che facendo $y - m \cos \frac{1}{2} \pi \alpha = u$, $x - m \cos \frac{1}{2} \pi \alpha = v$, prende la nota forma spettante al circolo ^(*), curva circonscritta all' m -te, e sostituendo l_1 per $m \cos \frac{1}{2} \pi \alpha$ ($u=0$) si spiega in

$$y^2 + x^2 - 2l_1 \left(\frac{y}{r} - \frac{x}{r} \right) + l_1^2 = 0.$$

§. 203. Per vedere se possa rinvenirsi una più semplice equazione dell' m -te regolare si rivolgano due nuovi assi rettangoli, uno dei quali OC (F.^o 38) passi pel centro.

Su questo l'asse OC congiunge gli estremi opposti de' lati paralleli $\overline{a_1b_1}$, $\overline{a_2b_2}$; se $m \cos \frac{1}{2} \pi \alpha$ (F.^o 31) si prolunga una linea il lato opposto al vertice principale, e si nell'uno che nell'altro caso si ha

$$y^2 = \frac{1}{2} r^2 - \frac{r^2}{2} \cos^2 \frac{\pi}{2n},$$

$$r^2 y^2 (m^2 \cos^2 \frac{\pi}{2n} - y^2) = \frac{1}{2} \left(r^2 - \frac{r^2}{2} \right) \cdot \left(\frac{1}{2} r^2 - \frac{r^2}{2} \right) = \frac{r^4}{2} \cos^2 \frac{\pi}{2n},$$

e perciò $l_1 x$ onde $l_1 m \cos \frac{1}{2} \pi \alpha$; pongasi questa formula nel sistema

(*) Fatto (pag. 148. 202) il caso $m=1$, il centro, centro del dato m -te, si ha $r^2 = a^2 \cos^2 \frac{\pi}{2n}$ onde $a^2 = \frac{r^2}{\cos^2 \frac{\pi}{2n}}$

verticale z -assiale z ; y invece z -assiale z (oss. int. X_z).
La rispettiva espressione d' x , y pongasi nel sistema sopra ottenuto e si avrà

$$\begin{aligned} \cos \frac{1}{2} \alpha - \cos \alpha \cos \frac{1}{2} \alpha - \cos \frac{1}{2} \alpha - \cos \frac{1}{2} \alpha (\alpha - 1) \\ \cos \frac{1}{2} \alpha - \cos \alpha \cos \frac{1}{2} \alpha - \cos \frac{1}{2} \alpha - \cos \frac{1}{2} \alpha (\alpha - 1) : \text{quindi} \\ x = \left[\cos \frac{1}{2} \alpha - \cos \alpha \cos \frac{1}{2} \alpha - \cos \frac{1}{2} \alpha (\alpha - 1) \right] \cos \frac{1}{2} \alpha \\ y = \left[\cos \frac{1}{2} \alpha - \cos \alpha \cos \frac{1}{2} \alpha - \cos \frac{1}{2} \alpha (\alpha - 1) \right] \sin \frac{1}{2} \alpha ; \end{aligned}$$

ponendo anche

$$\begin{aligned} u = \left[\cos \frac{1}{2} \alpha \cos \frac{1}{2} \alpha (\alpha - 1) - \cos \frac{1}{2} \alpha \cos \frac{1}{2} \alpha (\alpha - 1) \right] = \\ = \cos \left[\frac{1}{2} (\alpha - 1) \alpha - \frac{1}{2} \alpha \right] = r \cos (n - 1) \alpha - r \cos (n - 1) \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

per conseguenza $x = r \left[1 - \cos (n - 1) \frac{\pi}{2} \right]$ (*) ed il

$$\text{ sistema } y = r \left[1 - \cos (n - 1) \frac{\pi}{2} \right], u = -r \cos (n - 1) \frac{\pi}{2},$$

dove $\alpha > 0$ se $\frac{(n-1)\pi}{2} > \alpha$, ed r è il raggio dell'arco, e quello del cerchio de' seni e de' coseni, costituisce la semplice equazione che si ha sopra,

§ 210. Sia R la retta MC (Fig. 40) tracciata da un punto M nel piano dell'arco di cui centro C ,

e fatto MCa_1mb_1 , si avrà

$$MCa_1 = b_1 + \frac{\pi}{2}, \quad MCa_2 = b_1 + \frac{3\pi}{2}, \quad MCa_3 = b_1 + \frac{5\pi}{2}, \text{ ecc.}$$

$$MCa_n = b_1 + \frac{n(n-1)\pi}{2} = \pi - \left(\frac{\pi}{2} - b_1 \right) : \text{ e allora}$$

$$R_1^2 = R^2 - ar^2 - ar R \cos b_1,$$

$$R_2^2 = R^2 - ar^2 - ar R \cos \left(b_1 + \frac{\pi}{2} \right)$$

$$R_3^2 = R^2 - ar^2 - ar R \cos \left(b_1 + \frac{3\pi}{2} \right)$$

$$\dots \dots \dots$$

(*) Infatti, supponi questa equazione equivalente alla (*) di x di cui si avrà $\cos \left[\frac{1}{2} (n-1) \alpha - \frac{1}{2} \alpha \right] = \cos \frac{1}{2} (n-1) \frac{\pi}{2}$, ed allora:

$P_{m+1}^2 = R^2 - r^2 - m R \cos \left(\theta_1 + \frac{(2m-1)\pi}{n} \right)$; dunque

$$P_1^2 + P_2^2 + P_3^2 + \dots + P_m^2 = m(R^2 + r^2) -$$

$$m R \left\{ \cos \theta_1 + \cos \left(\theta_1 + \frac{2\pi}{n} \right) + \cos \left(\theta_1 + \frac{4\pi}{n} \right) + \dots + \cos \left[\theta_1 + (m-1) \frac{2\pi}{n} \right] \right\}$$

Si osservi che l'equazione identica

$$\cos \frac{1}{2} \theta + \cos \frac{3}{2} \theta + \dots + \cos (n-1) \frac{\theta}{2} = 0 \quad (14)$$

dove $m = n + 1$, qualora si faccia $n = 0, 1, 2, \dots, n$, e si sommino i risultamenti, somministra

$$\cos \theta + \cos (n+\theta) + \cos (n+2\theta) + \dots + \cos (n+n\theta) =$$

$$[\cos \frac{1}{2} (n+1)\theta + \cos \frac{3}{2} (n+1)\theta] : \cos \frac{1}{2} \theta;$$

che la prec. formula, scrivendo $m-1$ per $n + \frac{2\pi}{n}$ per θ , diviene zero, e si concluderà.

TEOR. 13.^a Che se da un esterno punto M , nel piano di un m -te regolare si conducono le rette P_1, P_2 ec. ai rispettivi vertici a_1, a_2 ec. ed al centro C de $ABC \dots BP$, risulta

$$P_1^2 + P_2^2 + P_3^2 + \dots + P_m^2 = m(r^2 + R^2).$$

§. 111. Il punto M può essere uno delle circonferenze descritte col centro C ed il raggio CM : l'angolo formato di λ dal piano dell' m -te si sostituisce $R^2 + R^2$ ad R^2 e si ha

$$P_1^2 + P_2^2 + P_3^2 + \dots + P_m^2 = m(r^2 + R^2 + R^2),$$

poichè P_1, P_2 ec. disegnano cateti di triangoli trigoni aventi il cateto comune λ .

La prec. equazione si riduce a $P_1^2 + P_2^2 = m r^2$ quando M coincide con un vertice,

§. 112. Trattandosi di un m -te fatto congiungendo i vertici alternativi, per vedere che se

prende un *arco regolare*, e che le diagonali d'ordine pari spettanti al *gon*-*n* e condotte da uno stesso vertice a_1 , misurano la distanza tra il prodotto vertice e gli altri dell'*arco* come sopra descritto; che in conseguenza (§ 5. antec.) la somma de' quadrati delle diagonali dispari, d'ordine pari per rapporto al *gon*-*n*, è $=n \sin^2$, e perciò che anche la somma de' quadrati delle diagonali d'ordine dispari risulta (§ 5. prec.) $=n \sin^2$. Ciò significa:

TEO. 20. Che in ogni *gon*-*n* regolare la somma de' quadrati delle diagonali d'ordine pari, (contando per diagonali i lati del *poligono* di partenza) è $=n \sin^2$, ed eguale a quella de' quadrati delle diagonali d'ordine dispari.

E. 113. Si congiungi in parte i della circonferenza descritta coi vertici a, b, c ec. (V. 112) di una figura poligonale, e posto

$$ar, ab \left(-\frac{\pi}{n} \right) = a\beta, \quad ar, ac = \frac{\pi}{n},$$

$$\text{avr} \quad ar, ab = ar, a\beta = ar, ac = \frac{\pi(r-\beta)}{n} (= \pi \alpha);$$

e condotte sulle corde ab, bc, cd ec. le perpendicolari CA, CV, CW ec. si otterrà

$$ab \left(-\frac{1}{2}\beta \right) : AC (= r) :: \sin \frac{1}{2} ar, ab \left(= \sin \frac{\pi-\beta}{n} \right) : 1.$$

$$\text{Quindi} \quad ab = \sin \frac{\pi-\beta}{n} \sin \alpha. \quad \text{Così}$$

$$bc \left(= \frac{1}{2} \gamma \right) : AC (= r) :: \sin \frac{1}{2} ar, (b+bc) \left[= \sin \left(\frac{\pi-\beta}{n} + \frac{\pi}{n} \right) = \sin \frac{\pi+\beta}{n} \right] : 1$$

$$\text{dove} \sin \frac{\pi+\beta}{n} = \sin (\pi - (\beta + \alpha)),$$

$$bc = \sin \frac{\beta+\alpha}{n} \sin (\beta + \alpha\beta), \quad \text{cioè} \quad bc$$

$$\sin a + \sin \frac{a+b}{n} + \sin (a + \overline{n-1}\beta) \left[-\sin \left(\frac{a+b}{n} + \frac{n-1}{n}a \right) - \sin \frac{b}{n} \right]$$

Si quindicesi la serie

$$\sin a + \sin (a+\beta) + \sin (a+2\beta) \dots + \sin (a + \overline{n-1}\beta)$$

nelle due

$$\sin a + \sin (a+\beta) + \sin (a+2\beta) \dots + \sin (a + \overline{n-1}\beta)$$

$$\sin (a+\beta) + \sin (a+2\beta) + \sin (a+3\beta) \dots + \sin (a + \overline{n-2}\beta)$$
 e scrivendo b per $n\beta$ il teorema (*) la 1.^a

$$(n-1)\beta = \frac{1}{2}(n-1)b, \quad n = \frac{1}{2}(n-1) \quad \text{e} \quad na + a = na.$$

$$\begin{aligned} &= \frac{\sin (a-\frac{1}{2}\beta) - \sin (a+\frac{1}{2}nb)}{\sin \frac{1}{2}\beta} \\ &= \frac{\sin \frac{1}{2}(n-1)b \sin [a+\frac{1}{2}(n-1)b]}{\sin \frac{1}{2}b} \end{aligned}$$

La 2.^a, data per comodo la sostituzione di a per $a+\beta$, e di b per $n\beta$, risulta

$$\begin{aligned} &= \frac{\sin (a-\frac{1}{2}\beta) - \sin [a+\frac{1}{2}(n-1)b]}{\sin \frac{1}{2}\beta} \\ &= \frac{\sin \frac{1}{2}(n-1)b \sin [a+\frac{1}{2}(n-3)b]}{\sin \frac{1}{2}b} \\ &= \frac{\sin \frac{1}{2}(n-1)b \sin [a+\frac{1}{2}(n-1)b]}{\sin \frac{1}{2}b} \end{aligned}$$

cioè uguale all'altra sopra ottenuta, perchè $\frac{1}{2}(n-1)b + \frac{1}{2}(n-1)b$ sarà $\frac{1}{2}nb = n\beta$: dunque

Teor. 21.° di Giacomo Gregory. La somma delle corde tirate da un punto della circonferenza circoscritta, al vertice d'ordine pari di un m -te regolare poligono, eguaglia quella delle corde tirate come sopra al vertici d'ordine dispari.

§. 224. Il prez. teorema essendo indipendente

(*) Basta fare soffo il ruolo del §. sop. (Nota)

$(n-1)\beta = \frac{1}{2}(n-1)b, \quad n = \frac{1}{2}(n-1) \quad \text{e} \quad na + a = na$

dalla grandezza dell'arco B , può supporre che B gradatamente decresca, fino a venire in a , ed allora, arrivando a per i si ha

$ab+ad+ag^2+ac, acc+ac+ag+ac$: vale a dire

Teor. 22.^a Che la somma delle diagonali di ordine pari eguaglia quella delle diagonali di ordine dispari.

§. 215. Se due punti interni si congiungono col vertice di un m - n regolare, formano un doppio aggregato di trigoni, tutti d'egual base, ed il 1.^o aggregato sta al 2.^o come la somma delle alture de' trigoni componenti il 1.^o, e quella delle alture de' trigoni componenti il 2.^o: d'altronde l'uno e l'altro aggregato equivale all' m , ed uno de' punti può suprirsi nel centro: dunque:

Teor. 23.^a di Ptolemeo Platon.^o La somma delle perpendicolari condotte ai lati di un m - n regolare da un punto interno, eguaglia quella degli apotemi. (*)

§. 216. Congiunto il centro Q (F : 42) coi vertici A, B ec. e coi punti medi a, a' ec. dei lati di un m - n regolare M , si tirino le perpendicolari da a alla Qb in b , da b alla Qc' in c , ec. e si formi un m - n spirale $Abcdaggh$ ec. ove $m+n=1$.

Pose l'origine dell' m pres. in A , quella delle coordinate in Q , ed Ax sulla Qd cada $x_1=m$ ed $y_1=0$, si conducano da a, b ec. le ordinate rettangole y_a, y_b ec. e si avrà

$$aQ=rcos\frac{2\pi}{n}, \quad y_a=rcos\frac{2\pi}{n}cos\frac{2\pi}{n},$$

(*) La dimostrazione di Ptolemeo (*Apud* di Mauro e Mauro delle due Cos.) ad altro è condotta necessariamente per via, ed allora vale di quella linea che è propria di al geo. Garzanti.

$$hQ_{ab} = Q_{ab} \cos \frac{2\pi}{n} + r \cos \frac{2\pi}{n}, \quad r_1 \cos \frac{2\pi}{n} \sin \frac{2\pi}{n};$$

$$cQ_{ab} = Q_{ab} \cos \frac{2\pi}{n} + r \cos \frac{2\pi}{n}, \quad r_2 \cos \frac{2\pi}{n} \sin \frac{2\pi}{n}; \dots$$

$$\left\{ r_1 \cos \frac{2\pi}{n} \sin \frac{2\pi}{n}, r_2 \cos \frac{2\pi}{n} \sin \frac{2\pi}{n}, \dots \right\}$$

Tal' è l'equazione del poligono spirale propo-
sto. Cerchiamone la superficie.

Sapremo $ab = \frac{1}{2}ac$ (lato dell' m. r. inscritto)
e c (pag. 258 lin. ult.)

$$\text{trig. } Q_{ab} : \text{trig. } Q_{ab} : 1 : \cos \frac{\pi}{n};$$

e fatto (§. 217) $\text{trig. } Q_{ab} = \frac{1}{2} \text{trig. } Q_{ab}$, risulta

$$b : P : : M : M' \text{ (m. r. inscritto)}$$

Si rapporti $\text{trig. } Q_{ab}$ a $\text{trig. } Q_{ab}$ e così in seg. e
si avranno un trigoni in proporzione geometri-
ca, che insieme costituiranno la richiesta super-
ficie, vale a dire

$$1 : P : : P : P^2 : : P^2 : P^3 : : P^3 : P^4 : \dots : P^{2n-1} : 1$$

e mediante la proporzione

$$\frac{P^{2n}}{P^{2n-1}} (\text{som. degli antec.}) : P : : P^2 (\text{som. de consec.}) : P^2,$$

$$P - P^2 = P^2 - \frac{P^{2n+1}}{P^{2n-1}} \text{ ossia } P = \frac{P^{2n+1} - P^{2n-1}}{P^{2n-1}(P - P^2)}$$

§. 217. Per non oltrepassar la sfera di una de-
montata letteratura abbiamo soppresso molte pos-
sibili ricerche, e tre interi articoli che rispetti-
vamente si tratta: Della Inscrittione de' poligoni
regolari e de' poligoni inscrittivamente circoscritti
l'uno nell' altro — De' poligoni circolari, spici-

classi e de' poligoni sovrapposti = Del poligoni dotati di una proprietà di massimo o di minimo argomenta che si incontrano spesso nella Mem.^a cit. (p. 185) e nel V. Tomo supplementario della Scienza del Calcolo. Un solo §, spettante al 2.^o degli articoli divisi ci sembra necessario di accennare, e lo soggiungiamo qui tempestivamente.

Condotta la corda AM , MV ec. nella figura $AmMmNo$ ec. (F.^o 66) che si concepisce descritta dal vertice M del poligono regolare AMG ec. ($=K$), poligono, che partendo dal punto A , va con moto di rotazione applicando i successivi suoi lati AB , BC , CD , ec. ec. di una volta AM , a panga in $BECmb$, $EBme$ (giacchè K si suppone il centro) $AB = a_1$, $CM = a_2$, ec. ec. si osservi:

1.^o Che i triangoli isosceli ABM , MCN , NDO ec. FAG , sono uguali a BEC ; e.^o che durante la rivoluzione ciascun triangolo BMC , CMD ec. la parte della superficie $AMNOPQHA$ ($=S$), il 2.^o coincidendo con CND , il 3.^o con DOE , ec. S , che S è composta de' prodotti tripli più la somma di ABM , MCN , NDO ec. FAG ; q.^o che tal somma equivale a

$$\frac{A}{2\pi} \left(\frac{1}{2} a_1^2 + a_1 a_2 + a_2^2 + \dots + a_{n-1}^2 + a_{n-1} a_n + a_n^2 \right) = \pi (a + b) \frac{A}{2\pi} a m^2 = \pi m a m K$$

e si vedrà essere

Tac. La superficie del poligono
 $AMNOPQHA = SK$,

cioè tripla del arco di giratura.

Nota pel §. 215. Dalle proporzioni (F.^o 40)

$$bd:ae :: be:ac :: 1:1$$

$$bf:ce :: ef:ae :: 1:1$$

$$df:ae :: de:ae :: 1:1$$

risulta la somiglianza de' triangoli $h'f'$, con: d'al-
 questa ciascuno de' triangoli ahf , $h'of$, def è
 intreg. $h'f'$; dunque $\text{trig. } ahf = \frac{1}{2} \text{trig. } aoe$.

Nella F^a di se ha $\text{trig. } aef = \frac{1}{2} \text{trig. } aob$; e perchè
 $ah = ef$ ed $ao = of$, è $\sin = \sin aef$; ma i trian-
 gi aoe , $h'fo$, il seno of ed il trigono aef
 hanno eguale seno; dunque

$\text{tri. } aoe = \text{tri. } h'fo = \text{tri. } aef$; perciò

$\text{tri. } aef = \text{tri. } aoe = \text{tri. } h'fo = \frac{1}{2} \text{tri. } aob = \text{rom. } afoa$.

Dico il seno del seno gh e si conchiu-
 derà co.

I poliedri regolari presentano speciali rappor-
 ti analoghi a quelli che notiamo nel cor. §. 105,
 ma non è questo il luogo per tale discussione.

CAPITOLO V.

Delle Linee di second' ordine.

—§§—

Notioni Preliminari.

§. 118. *Linea curva* è un sistema di linee in-
 finitamente vicine fra loro inclinate, e può
 concepirsi generata da un punto che percorre una
 serie di successivi spazi, discorre in una par-
 ticular direzione, e misura d'ogni quantità au-
 gmentata. (*)

(*) Prescindendo da questa questione si esprime nell'elemento
 l'attribuzione di comporre l'elemento di un'area curva, e si
 la lunghezza di poco non basta. (Vedi il §. 118. di anal.
 m. 1. 1. 1.) e per la sua costruzione e quella da cui non
 risulta, e si legge (Vedi il §. 118. di anal. m. 1. 1. 1.) che
 la specie del Calo dell'area si suppone la specie dell'area
 inclinata.

144

La curva è regolare se la distribuzione de' suoi punti o la sua generazione, va sottoposta ad una legge costante: se ne acquista una rappresentazione descrivendola con un sicuro e facile meccanismo, ma non completa se non è riposta nell'equazione le coordinate de' suoi punti, e questa si ottiene in due maniere: 1.^a rapportandoli a due oggetti fissi, semplici e dati di posizione, quali sono i punti, le rette, gli angoli ed i piani, ed esprimendo, per mezzo di qualche proprietà d'altronde nota, l'anzidetto rapporto: 2.^a ricavandola dal simbolo generale dell'equazione fra due indeterminate.

Una curva è algebrica o trascendente; può essere esponenziale o trascendente: spettano alla 1.^a classe quelle, la cui equazione dipende dalle sole sei operazioni fondamentali dell'algebra algebrica: alla 2.^a se trovati siffatti de' funzioni logaritmiche o trigonometriche: un esponente variabile caratterizza le altre due classi; la 3.^a se razionale, se irrazionale la 4.^a

Le linee si distinguono in ordini: al 1.^o appartiene la retta; al 2.^o comprende le curve di 2.^a genere, la cui equazione generale è

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0 \dots (A)$$

Le linee di 3.^o ordine, altrimenti dette curve di 3.^a genere, sono espresse con l'equazione

$$ax^3 + bxy^2 + cxy^2 + dx^2 + ex^2 + fy^3 + gxy + hy + iz + l = 0$$

La fig. delineata a.^o è curva una linea il cui concetto generale è descrittivo, alcuni dei loro: a.^o una linea che non è retta ed è composta di tre: 1.^o ramo il cui tracciato regge, di cui prova che si muove con qualunque legge, non sono particolari: la a.^o ha per centro il valore di valore negativo: la 3.^o è irregolare, e può riferirsi ad un poligono composto di un linea a.^o di lei.

Bisogna però che l'equazione non sia risolvibile in termini razionali, perchè in tal caso essa rappresenta un sistema di più linee. Tal'è $y^2 - y - xy + a = 0$ che equivale ad $(y-x)(y-a) = 0$.

Dividendo per un coefficiente tutti i termini si sempre che i coefficienti necessari per le linee degli ordini $1^o, 2^o, 3^o, 4^o$ etc. sono rispettivamente a, b, c, d etc. Sarebbe dunque che $\frac{1}{2}(x+1)(x+2) = 0$ punto dato debbano bastare per costituire la forma e la posizione di una linea dell'ordine n^{mo} , perchè sostituendo successivamente nell'equazione le due coordinate di ciascun punto, e ottenere un n^o di equazioni eguale a quello de' coefficienti. Ciò infatti succede per rapporto alle linee di 1^o ordine (161) ed anche, come presto vedremo, di quelle di 2^o , ma un tal numero non si estende agli ordini superiori, e la ragione di è che non tutte l'equazioni sopra indicate risultano diverse e cancellabili.

§ 119. Centro di una curva è un punto C del suo piano, dove ogni corda MM' (F' 50) rimane bispartita. Condotta una 1^a corda ACB , si tirino le perpendicolari MP, MP' , ed in forma de' triangoli eguali si avrà, prendendo dal segno,

$$CP(-x) = CP'(=+x); MP(-y) = MP'(=+y).$$

Dunque l'equazione di una curva dotata di centro non si altera sostituendovi $-x, -y$ per x, y , e viceversa. In tale ipot. l'origine è nel centro. Addechè l'equazione (A) spetta ad una curva come sopra, bisogna dunque che manchino i termini xy, x^2 , e che questi, con una conveniente traslazione degli assi possano eliminarsi.

Una traslazione che bispartisce un infinito sistema di corde parallele diventa distruttiva. Essi

ha in conseguenza la proprietà di bipartire la superficie convessa nel perimetro della curva. Due diametri diretti convergono quando uno bipartisce le curve parallele all'altro.

§ 200. Le proprietà di una curva sono indipendenti dagli oggetti a cui viene riferita: vannevoli si modifica la forma non il significato dell'equazione che la rappresenta, e la modificazione dev'essere intesa in se stessa o qualche un particolare, e se condurre ad un'espressione della massima semplicità. Gli artifizi di tal natura, mentre presentano la curva sotto diverso aspetto, notabilmente ne agevolano la discussione e le applicazioni. Basti questo corso per far conoscere l'importanza delle trasformazioni comprese nel'interno del §. 183.

§ 201. Dopo aver veduto che l'equazione $ax+by+cz=0$ è esclusivamente si riferisce alla linea retta, l'ordine richiede che ci proponiamo d'investigare il geometrico significato dell'equazione generale (A) (183)

$$\text{ovvia } y^2 + \frac{bx+cd}{a}y + \frac{cx^2+ex}{a} + \frac{f}{a} = 0.$$

Posto $y = \frac{bx+cd}{ax}$ per y , espressione che serve a togliere il 2.^o termine (34) si ottiene la trasformata

$$y^2 + \frac{(4cx-b^2)}{4a^2}x^2 + \frac{(4ex-abd)}{4a^2}x + \frac{(4fd-c^2)}{4a^2} = 0,$$

che indichiamo per $y^2 = Cx^2 + Bx + D \dots (B)$ con la y uguale $(F^2 \text{ alla } 4a^2)$ alla $4a^2m$, cioè alla primitiva $y = MP$ derivata di m^2P , ordinata dalla retta Ad , simboleggiata dall'equazione

$$z = \frac{b}{2a}x + \frac{d}{2a}.$$

e derivata insieme della $\text{sen}'m \cdot \text{sen}(m\beta)$. 245

Per non lasciare l'interessante derivazione della equazione (8) del tutto affidata al dubbio lavoro di un astratto artefice, d'istruendo proporzionale, possiamo e cerchiamo direttamente.

Effettuate le sostituzioni espresse nel sistema (IX) del §. 285, nell'ipotesi di seno, e soppresso per brevità il segno s , si ha la trasformazione

$$\begin{aligned} & \alpha s^2 + (\alpha \text{sen} s \cdot x + \beta \text{cos} s \cdot x) \text{sen} \\ & + (\alpha \text{sen}^2 s \cdot x + \beta \text{sen} s \cdot \text{cos} s \cdot x + \text{cos}^2 s \cdot x) s^2 \\ & + (\alpha \beta + \alpha') s + [(\alpha \beta + \alpha') \text{sen} s \cdot x + (\beta \beta + \alpha') \text{cos} s \cdot x] \\ & + \alpha \beta^2 + \alpha \beta^2 + \alpha' \text{sen} s \dots \dots \dots (i) \end{aligned}$$

dove β, s, x , essendo quantità arbitrarie, può supporre $\alpha \text{sen} s \cdot x + \beta \text{cos} s \cdot x = 0$, $\alpha \beta + \alpha' = 0$, cioè

$$\text{sen} s \cdot x = -\frac{\beta}{\alpha s}, \quad \beta = -\frac{\alpha'}{\alpha s};$$

si ponga (det. ult.) $\frac{x}{\text{sen} s} = y$ per s , y per x ; ed osservando che in forza dell'equazione $\alpha \beta + \alpha' = 0$ l'ultima termine ridotto ad $\frac{1}{2} \alpha \beta + \alpha'$, si avrà la trasformazione richiesta

$$y^2 = \left(\frac{\beta^2 + \frac{1}{2} \alpha \alpha'}{\frac{1}{2} \alpha^2} \right) x^2 + \alpha \frac{(\beta \alpha' - \alpha \alpha')}{\frac{1}{2} \alpha^2} x + \frac{\alpha^2 - \frac{1}{2} \alpha \alpha'}{\frac{1}{2} \alpha^2} \dots \dots (C)$$

il cui significato non differisce (286) da quello della proposta (A), e che ci dà un'idea generale delle diverse curve che dalla medesima possono essere rappresentate.

1.° Se $\beta^2 = \frac{1}{2} \alpha \alpha'$, mediante la sostituzione

d' $x = \frac{d^2x - qdy}{x(hd - ax)}$ si ottiene $y^2 = \frac{(hax - ad^2)}{4a^2}x$,

che dà come $y^2 = ax$; equazione, che quando $ax > ad$ dà le $y \left[= \frac{1}{2} \sqrt{(hax - ad^2)x} \right]$ indefinitamente crescente come le x positive, e tale verso le x negative se $ax < ad$ (37); il che significa essere la curva illimitata alla destra o alla sinistra dell'origine: proprietà caratteristiche, che esclusivamente dipende dall'ipotesi $b^2 = ax$ e costituisce la parabola:

2.^a Quando $b^2 < ax$ avrà un valore d' x , si positivo che negativo, oltre il quale il 2.^o membro dell'equazione (37) costantemente risulta < 0 , e perciò la curva, attesa l'integrazione cui, oltre certi limiti, le y soggiacciono, si alla destra che alla sinistra dell'origine, è costruita e però compresa in uno spazio limitato. Ad essa si dà il nome di ellipse.

3.^a Avendosi $b^2 > ax$ avrà un valore d' x , si positivo che negativo, oltre il quale il termine $\frac{(b^2 - ax^2)}{4a^2}x^2$ supera la somma degli altri due addendati si faccia $x = 0$, e per conseguenza la curva indefinitamente si estende a destra ed a sinistra: proprietà speciale per cui si distingue dalle due precedenti e si caratterizza col nome d'iperbola.

4.^a Nel caso in cui si verifica cioè a detto, si ha il circolo (*), curve che tra poco vedremo es-

(*) Basta osservare che indicando l'origine arbitraria le sostituisce il $a_1 \beta$ per x e d' $y = \beta$ per y , si può prendere delle indeterminazioni a_1, β nel sistema dell'equazione (37) e avere

non un caso particolare della 1.^a ipotesi. Intanto possiamo stabilire che la formula generale (A) ammette un quadruplice significato, cioè che essa rappresenta quattro curve diverse:

Parabola se $b^2 = 4ac$; Ellisse se $b^2 < 4ac$;

Circolo quando $a = b$ e $b = 2a$;

Iperbola allorché $b^2 > 4ac$.

§. 111. La discussione delle curve qui sopra indicate, esige che le rispettive loro equazioni sia dotata di una sufficiente semplicità, e ne' due casi 1.^o e 3.^o ciò non succede. Tentiamo dunque una nuova trasformazione dell'equazione (A), e facciamo sulle prime la sostituzione d' $x = x + \alpha$ e d' $y = y + \beta$ per x, y . Il risultamento è

$$ay^2 + bxy + cx^2 + (a\alpha\beta + b\alpha + c\beta)y + (a\alpha^2 + b\alpha + c\beta^2 + b\alpha\beta + c\alpha^2 + d\beta + e\alpha + f) = 0.$$

Poniamo

$$\{a\alpha\beta + b\alpha + c\beta^2 + b\alpha\beta + c\alpha^2 + d\beta + e\alpha + f = 0\} \dots (2)$$

e perchè la somma di queste, rispettivamente moltiplicate per β, α , coincida con

$$ay^2 + bxy + cx^2 = \frac{1}{2}(d\beta + e\alpha)$$

si avrà la ridotta

$$ay^2 + bxy + cx^2 + \frac{1}{2}(d\beta + e\alpha) - f = 0,$$

che indichiamo per

$$ay^2 + bxy + cx^2 + g = 0 \dots (3)$$

se $4c^2 > b^2$, il che, se a ed f sia negativo, dà $y^2 + x^2 = \frac{f}{c}$ cioè un'equazione che dimostra essere (2.^o Def.)

$$(CL^2P)^2 = (CP)^2 + (LP)^2$$

ovvero che $\frac{f}{c} = \frac{r^2}{c}$, qualunque punto del diametro di P , onde che il raggio CP non sia uguale fra loro, il che esclude il cerchio.

248

Facciasi $\sin \alpha \cos \beta \sin \alpha$, $y \cos \alpha + \sin \alpha \sin \beta$, e così

$$aa^2 + (\sin \alpha \sin \beta + \cos \alpha \cos \beta)aa +$$

$(\cos \alpha^2 \sin \beta + \sin \alpha \cos \beta \sin \alpha + \cos \alpha^2 \sin \beta)x^2 + g \cos \alpha$,
equazioni i cui primi tre termini coincidono con
quelli dell'eq. (1). L'esistenza del 2.^o termine
dipende per conseguenza dalla stessa ipotesi
 $\tan \alpha \sin \beta = b : aa$. Si appone g ricavando α, β
dall'equazioni (2), cioè

$$\left\{ \alpha = \frac{aa \cos \beta}{aa \cos \beta - b}, \quad \beta = \frac{b \cos \alpha}{aa \cos \alpha - b} \right\} \dots (4)$$

e si ha $g = f + \frac{aa^2 - ab^2}{aa \cos \beta}$.

Altro non resta che sostituire $\frac{a}{\cos \alpha}$ per x , $-\frac{b}{\sin \alpha}$

per $\tan \alpha$, e cangiare x in y onde ottenere

$$4a^2y^2 + (4aa - b^2)x^2 + 4af - \frac{4a(aa^2 - ab^2)}{aa \cos \beta} = 0 \dots (D)$$

Questa è l'eq. $4a^2y^2 + (4aa - b^2)x^2 = 0 \dots (E)$
sono le più semplici trasformate, esprimenti le
curve comprese nell'equazione (A), ed hanno il
pregio d'essere affette da coefficienti interi e ra-
zionali. Per comodo le porremo sotto la forma
 $My^2 + Nx^2 = Q \dots (F)$; $My^2 + P = 0 \dots (G)$.

ARTICOLO I.

Del Circolo.

§. 248. Il circolo AEF (Fig. 11) avendo dato
di grandezza e di posizione, il che suppone
note il raggio $AC (= r)$ e note le distanze

$Aq(-\alpha)$, $Cq(-\beta)$ del centro C da due angoli ¹⁴⁹ uguali α, β , se si condurrà un raggio qualunque Cm , e dal punto m l'ordinata $mq(-y)$ e la sua parallela ad αx , che incontri in n la Cq , risulta $(Cm)^2 = (Cn)^2 + (mn)^2$;

e perchè $\begin{cases} Cm = Cq - qm = Cq - mn = \beta - y \\ mn = qp - qm = \alpha - x \end{cases}$ si ha

$$(y - \beta)^2 = (x - \alpha)^2 + m^2 \dots (c) \text{ (eq. generale.)}$$

Si trasferisce l'origine al centro con fare $\alpha = 0, \beta = 0$ il che dà

$$y^2 + x^2 = r^2 \dots (d) \text{ (eq. centrale.)}$$

Questa equazione esprime la invariabilità del raggio, egualmente si ottiene partendo dalla proprietà che l'angolo nel semicerchio è retto, e da qualunque altra essenziale al circolo. Bleva t, t' gli angoli fatti col diametro da due corde approssimate, tali cioè che insieme sottodanno l'angolo $t + t' = \frac{1}{2}\pi$ si ha $(\Delta t \Delta t')$

$$\tan t = \frac{t}{\tan t'}; \text{ ma } \tan t = \frac{Y}{x - \beta}, \tan t' = \frac{Y}{x + \beta};$$

dunque $y^2 + x^2 = r^2$.

L'ipot. $\alpha = r$, $\beta = 0$ suppone l'origine nel destro vertice del diametro e somministra

$$y^2 = 2rx - x^2 \dots (e) \text{ (eq. al vert.)}$$

Per trasferire l'origine in un punto della circonferenza basta supporre $\beta^2 + \alpha^2 = r^2$, ed eliminato r^2 dall'equazione (d) si ottiene

$$y^2 + x^2 - \alpha(x + \beta y) = 0 \dots (f) \text{ (eq. alla circonf.)}$$

Es. Si domanda la posizione e la grandezza del circolo $y^2 + x^2 - y - x = 0$.

Si eliminano gli ultimi due termini, il che suppone trasferita l'origine nel centro (368),

sostituendo $x+\alpha$, $y+\beta$ per x , y , e facendo anche la trasformazione

$$y^2+x^2+(\alpha\beta-1)y+(\alpha\alpha-1)x+\beta^2+\alpha^2-\beta-\alpha=0, \\ \alpha\beta-1=0, \alpha\alpha-1=0; \text{cioè di } \beta=-\frac{1}{\alpha};$$

quindi $r=-\frac{1}{\alpha}$ ed il centro nel punto $(\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\alpha})$.

Infatti la proposta equivale ad

$$(y+\frac{1}{\alpha})^2+(x-\frac{1}{\alpha})^2=r^2,$$

e la sostituzione d' $y+\frac{1}{\alpha}$ per y e d' $x-\frac{1}{\alpha}$ per x la riduce nell'equazione centrale $y^2+x^2=r^2$.

§ 104. La retta CN perpendicolare ad una retta TT' ($F' \neq \infty$) tangente nel punto $M(x, y)$ dicesi normale, e siccome passa pel centro C ove si suppone l'origine, la sua equazione può rappresentarsi per $y=\alpha_1 x$; ma

$$CP(\infty, y):PM(\infty, y) :: \tan M'CP(\infty, y);$$

dunque la definitiva equazione di una normale del circolo è $y=\alpha_1 x$, e per aver quella delle normali che incontrano la circonferenza in un dato punto (x_1, y_1) basta ottenere $y_1=\alpha_1 x_1$ dalla prev. il che dà

$$y-y_1=\alpha_1(x-x_1), \text{ ossia } yy_1+xx_1=r^2 \dots (g)$$

L'equazione della tangente che tocca la circonferenza in (x_1, y_1) è dunque (165)

$$y-y_1=-\frac{y_1}{x_1}(x-x_1) \text{ ossia } yy_1+xx_1=r^2 \dots (f)$$

§ 105. Per tirare la tangente da un punto esterno $T(x_0, y_0)$ si pongano nell'eq. (f) le coordinate x_0, y_0 in vece d' x, y , e fatta la sottrazione di

$$y_0^2+x_0^2=r^2 \text{ da } y_1^2+x_1^2=r^2, \text{ si avrà}$$

$$(x_1 - \frac{1}{2}x_2)^2 + (x_1 - \frac{1}{2}x_2)^2 = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2).$$

Ma figurata la FC in C' , e descritto il circolo col centro C' ed il raggio $C'C$ si ha

$$C'P = \frac{1}{2}x_2, C'P = \frac{1}{2}x_1, CC' = \sqrt{x_2^2 + x_1^2};$$

e disegnata la $C'r$ parallela a CP' , ottenesi

$$Mr = \frac{1}{2}x_2, C'r = \frac{1}{2}x_1,$$

che $\overline{Mr} = \overline{C'r} = \overline{C'M} = \overline{C'U}$. Dunque il circolo descritto come sopra passa per l'uno e l'altro contatto M, M' .

§ 146. Teor. Se dal centro C di un dato circolo hPG ($P: 46$) si condurrà la perpendicolare CH ad una data retta AB , essendo h, G, i punti in cui la perpendicolare taglia la circonferenza, una trasversale per G che incontri AB in D , la circonsc. in F , da $DG \cdot GF = CH \cdot CB$. Ciò risulta dal trigoni simili EPG, DGH .

Il teor. si spiega in persona (*) enunciandolo così:

Persona. Dato un circolo ed una retta AB , ed è sulla circonferenza un punto G tale, che tirando per esso una trasversale DGF , il rettangolo $DG \cdot GF$ risulti costante. Infatti si ha

$$EPG \cdot GF = DG \cdot GF.$$

§ 147. Teor. Essendo AB , ed ($F: 47$) diametri paralleli di due circoli che si toccano in M , i punti M, b, S , sono in linea retta.

Dim.^a Si ha $\overset{\frown}{CAM} = \overset{\frown}{CMB}$ (perchè CB, CM sono raggi dello stesso circolo) $= \overset{\frown}{MBb}$ (stessa parallela); ma $\overset{\frown}{CAM} + \overset{\frown}{BMS} = \pi$; dunque

(*) La natura del problema che è puramente geometrico, non richiede del Costrutto. Risponde (F: 1) la risposta come immediata al problema, ed al costrutto.

sta

$\hat{AM} = \hat{BM} = r$ e però se,

Con eguale facilità si vede che

$\hat{C'M} = \hat{C'D} = \hat{M'DC}$; e per conseguenza $\hat{M'D}$ opposto al vertice di $\hat{C'MB}$.

§. 108. Teor. Diviso conoque il diametro $\hat{AB}$ in D ($F: \hat{AB}$) si si descrivono i semicircoli $\hat{ALD}$, $\hat{DNB}$ e si alza in D la perpendicolare $\hat{Dm}$ lo spazio $\hat{AmB} \cap \hat{DLA}$ (Parabola degli antichi) resta eguale al circolo il cui diametro è $\hat{Dm}$. Dim.^a A ciascun membro dell'equazione $\hat{AD} \cdot \hat{DB} = (\hat{Dm})^2$ aggiungasi $\hat{AD} \cdot \hat{DB} + (\hat{DA})^2 + (\hat{DB})^2$ e si avrà $(\hat{AB})^2 = 2(\hat{Dm})^2 + (\hat{AD})^2 + (\hat{DB})^2$, cioè $(\hat{AB})^2 - (\hat{AD})^2 - (\hat{DB})^2 = 2(\hat{Dm})^2$, e sostituiti i semicircoli in quadrati del diametro resta se.

§. 109. Teor. I cerchi che toccano le $\hat{DM}$, la convessità del semicircolo maggiore e la concavità del minore corrispondente, sono eguali. Dim.^a Essendo a , c , d , i centri di uno dei cerchi proposti, si ha il diametro $\hat{ab}$ parallelo ad $\hat{AB}$, perchè normale entrambi alla $\hat{Dm}$. Sia C l'intersezzo di $\hat{Dm}$ e di $\hat{Abc}$ (ha. retta pel teor. antiprec.). La $\hat{Bcd}$ è pur retta e normale ad $\hat{AC}$; retta la $\hat{bcd}$, retta $\hat{Adc}$ che si prolunga sino ad $\hat{AmB}$ in e ; si ha $\hat{Be}$ normale ad $\hat{Ac}$,

Così linea retta (*); e perchè $\hat{AdD} = \hat{AcB} = \frac{1}{2}\pi$, si però

$\hat{DB}$, $\hat{BC}$ sono parallele, sta $\hat{AC}:\hat{BC}::\hat{AB}:\hat{DB}$: d' altronde i triangoli simili $\hat{BCd}$, $\hat{ACD}$ danno

(*) Considerando il triangolo $\hat{ACB}$ si vede, che toccando la perpendicolare che scende dal vertice sul lato $\hat{ab}$ in d colla tangente $\hat{Adc}$ (99) l'angolo $\hat{CB}$ ed l'angolo retto: ma la perpendicolare è la più vicina: dunque la $\hat{Be}$ prolungata passa per C .

$AC:bc :: AD:bd$, dunque $AD:DB=bd:AB$, e siccome pel 1.^o circolo inscritto si trova $AD:DB=Ad:AB$ ne segue che il suo diametro Ad sia $=bd$, cioè ac , secondo lo stesso se i cerchi ALD, DNS , s'intersecano.

ARTICOLO II.

Della Ellisse.

§. 1.^o La. L'equazione $Ay^2+Bx^2=Q$ (111) dove M, N, Q si suppongono positivi, dimostra:

1.^o Che qualunque sia l'angolo delle coordinate, angolo da cui l'equazione è indipendente, l'ipotesi $Cy=Cx$ ($F^2=\frac{Q}{4}$) ossia zero dà sempre per y due valori Cd, Ce , eguali e di segno contrario, d'onde necessariamente deriva (115) che la curva sia dotata di quattro nel punto C .

2.^o Che il massimo valore d' y , cioè Cd , corrisponde ad $x=0$ ed è $Cd=\sqrt{\frac{Q}{B}}$; il massimo di x , ossia $Cb=\sqrt{\frac{Q}{A}}$, si ha con fare $y=0$.

3.^o Che indicando Cd, Cb per b, a , risulta $M=Q:b^2, N=Q:a^2$ e l'equazione ellittica si riduce ad una delle seguenti forme semplici ed eleganti:

$1) a^2y^2+b^2x^2=c^2b^2; 2) y^2+ax^2=1; \dots (x)$ nella 1.^a delle quali si suppone $c=b, p=a, c=b$.

§. 2.^o Siccome gli assi ortogonali sono preferibili, giova verificare che d'ora in avanti due diametri perpendicolari fra loro.

Sia $y-y_0=m(x-x_0)$ una retta finita per un dato punto (x_0, y_0) e che attraversi una curva di 2.^o grado dotata di centro. Sostituisce alla precedente equazione il sistema

$$y=mx+y_0, x=x_0+x, (161)$$

254

è chiaro che basta combinare questa con l'equazione (A) (116) per avere della trasformata il due valori di β , cioè le distanze tra il punto (x, y) e quella ove la trasversale taglia la curva. La trasformata essendo

$$A^2[(am^2+bm+cn)^2+\lambda\{(am+b)y_1+(bm+cn)x_1+dm+cn\}^2 \\ +ay_1^2+bx_1y_1+cx_1^2+dy_1+em_1+f]=0$$

esiste una retta, o diametro del cui punti, che si concepisce successivamente preso per (x_1, y_1) , corrispondono due valori eguali e di segno contrario della distanza β , perchè x_1, y_1 verificano

$$(am+b)y_1+(bm+cn)x_1+dm+cn=0$$

ovvia $y_1 = -\frac{bm+cn}{am+b}x_1 - \frac{dm+cn}{am+b} \dots (B)$

Tal'è dunque l'equazione della retta richiesta cioè di un diametro; ed affinché possa egli trovarsi in una posizione perpendicolare alla $y-y_1=am(x-x_1)$ (parallela alla $y-y_1=am(x-x_1)$) si richiede e basta che resti soddisfatta (116) la condizione

$$am = \frac{am+cn}{bm+cn} \dots (C)$$

ed questa è sempre possibile, perchè, tolta il denominatore e fatte le riduzioni, ottenesi la formula reale

$$am = \frac{1}{2} \left\{ a-c + \sqrt{(a-c)^2 - 4b^2} \right\}.$$

d'altronde il doppio valore di a diametro che la trasversale bisecante ammette due posizioni diverse: dunque tutto concorre a provare l'esistenza de' diametri coniugati ortogonali fra loro. (*)

(*) Quando b^2 eguale a $\frac{ac}{4}$ ha $am = \frac{ac}{2b}$, valore unico. Dunque la perpendicolare ammette una sola trasversale bisecante e però esiste il diametro coniugato. Di ciò si segue.

§ 134. Sieno (P' , 50) $AB(-ma)$, $DB(+mb)$ i diametri sopra indicati. La 1.^a delle (2) sarà

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2) \dots (1)$$

la vedremo che quando $x=a$ la y diviene immaginaria e che tale diviene la x in

$$x^2 = \frac{a^2}{b^2}(b^2 - y^2)$$

quando $y=b$: siccome la y diminuiscono e misurare che $x(-a)$ va crescendo, la curva ha la forma di un'ovale compresa dentro i limiti A, B, D, E ; e le occupa la prerogativa d'essere simmetrica, cioè occupata di quattro rami AD, AE, BD, BE , uguali e simili, perchè alle $CP(-x)$, $CP(+x)$ corrispondono uguali ordinate, ed alla stessa CP le ordinate PM, PM , eguali (di segno contrario.)

§ 135. La 2.^a delle (2) insegna pure che qualora si prendano ad arbitrio due ordinate Y, Y' , sta $y^2 : y'^2 :: (a+x)(a-x) :: (a+x')(a-x')$ cioè che i quadrati di due ordinate stanno come i rettangoli delle rispettive ascisse: verità che subito si deduce anche dall'equazione al vertice

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)$$

la quale ottienasi facendo $AP=x$.

Le rispettive equazioni della ellipse e del circolo circoscritto mostrano che sta $PM:PE :: b:a$.

§ 136. Siccome necessariamente esiste un'ordinata PG , (che diciamo $\frac{p}{2}$) eguale a qualunque data retta ab , può supporre $a:b :: \frac{p}{2} : a$ però $\frac{b^2}{a^2} = \frac{p}{a^2}$. Così l'equazione (1), scrivendo

$d_1 = CF = CP$ per x , lo per y , diviso

$$\frac{1}{2}a = \frac{1}{2}(a^2 - c^2) \text{ ossia } \frac{1}{2}ap = ma^2 - c^2,$$

e perchè $\frac{b^2}{a^2} = \frac{p}{a^2}$ da $\frac{1}{2}ap = b^2$ risulta $c^2 = ma^2 - b^2$.

Dunque 1.° $FD = ca = CA = PD$, e l'arco il cui centro D , il raggio CA , taglia il 1.° asse AB nei punti F, P .

$$2.° \quad FM = \sqrt{[(PM)^2 - (CF - CP)^2]} =$$

$$\sqrt{\left[\frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2) - (V a^2 - b^2 - x^2)^2\right]} = a - \frac{cx}{a};$$

e nella stessa guisa $P'M = a + \frac{cx}{a}$; dunque

$$FM + P'M = 2a = AB;$$

e può se si formano gli estremi di un filo in F, P' , un ago che scorra lungo esso descrivere un'ellisse.

§. 255. Prolungata la $F'M$ finchè $MG = MP$ ($F: \frac{1}{2}$) e bisagata la FG in m , se per M ed m si condurrà la QMT si ha la tangente in M . Infatti FAG ossia $FaP = P'G (= P'M + FM = 2a)$, e perciò qualunque punto a della QT , diverso da M , trovasi fuori del perimetro.

§. 256. La retta Mm non può bisagare la base FG del triangolo isoscele FAG senza che se derivi $F\hat{A}m = m\hat{A}G$, ma $m\hat{A}G > P\hat{A}Q$: dunque, se si concepisce generata una superficie mediante la rivoluzione della semicirconferenza AMB intorno ad AB , tutti i raggi luminosi e accorti, (i quali si sa che fanno l'angolo d'incidenza eguale a quello di riflessione) qualora partano dal punto F si raccolgono in P e vicinanza. Quindi è che i punti F, P diconsi *focchi*, e le

rette $FM, F'M$, raggi vettori. La doppia ordinata p , corrispondente ad uno de' fuochi, divisi per parametro, e le CF, CF' costituiscono l'asse-minore della ellipse.

§. 157. La consistenza della 1.^a equazione (g) (156) con $ymd'x + b'$ suppone che la curva e la retta s'incontrino, e ciò non può succedere senza che corrispondano ai punti d'incontro le stesse coordinate dell'una e dell'altra linea; nell'ipotesi onde si tratta è dunque permesso di eliminare tra le due suddette equazioni una delle coefficienti x, y . Or tale operazione condurrà necessariamente ad un'equazione finale di 2.^o grado: dunque i punti d'incontro fra una retta ed una linea di 2.^o ordine non possono essere più di due; e perchè ciò si verifichi, bisogna che le risolvanti dell'considerata equazione sieno reali e diverse. Nel caso ch'esse sieno eguali, le tangenti riduconsi ad una, ed è il contatto della retta con la curva. Questa saggio teorético ci fa strada a trovare l'equazione della retta che tocca una data ellipse in un punto (x_1, y_1) .

Fra la trasversale $y - y_1 = md'(x - x_1)$ ed

$a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$ si elimina y , e scrivendo ~~alleg.~~ per $a^2b^2 - b^2x_1^2$ si avrà per $a^2y_1^2$

$$(x - x_1)[a^2d'^2(x - x_1) + md'd'y_1 + b^2(x - x_1)] = 0.$$

I due fattori, posti eguali a zero, danno

$$x = x_1, \text{ o } x = \frac{(a^2d'^2 - b^2)x_1 + md'd'y_1}{a^2d'^2 - b^2},$$

e per apparenza la confusione da cui dipende la loro identità basta supporre

$$x_1 = \frac{(a^2d'^2 - b^2)x_1 + md'd'y_1}{a^2d'^2 - b^2},$$

ovvia $x/(a^2x'^2+b^2)=(a^2x'^2+b^2)x_1/aa^2x'_1$,

e ricavare il valore dell'incognita a' , valore da cui naturalmente dipende la supposta equazione.

Sopprimi i due termini $a^2x'^2x_1$, $a^2x'^2x_1$, si ottiene $a'=-\frac{b^2x_1}{a^2x'_1}$, valore sempre reale: dunque

$y-y_1=-\frac{b^2}{a^2}x_1(x-x_1)$ ossia $a'^2yy_1+b^2xx_1=aa^2b^2=(a)$

è l'equazione della retta che tocca la data ellisse nel punto (x_1, y_1) . Essa equivale ad

$$y=-\frac{b^2}{x_1}-\frac{b^2x_1}{a^2x_1}x \quad \text{ovvia} \quad y=-\frac{b^2}{x_1}+a'x, \text{ e perchè}$$

$$(15a) \text{ la } (1) > \frac{b^2}{x} \text{ dà } \left(\frac{b^2}{x}\right)^2 = \frac{b^4x_1^2}{a^2x_1^2} + b^4aa^2x'^2 + b^4,$$

si può mettere sotto la forma, secondo molte vantaggi, $y=aa'x+\sqrt{(a^2x'^2+b^2)} \dots (a')$

§. 23. Supponendo $y=0$ nella formula (a) si ottiene $x=\frac{b^2}{x_1}=CT$; quindi $CP:CA:CA:CT$,

teorema importante, e che non lascia di variare se a sia un semidiametro, perchè il valore del §. antecedente non subisce alterazione se si fa uso dell'equazione ellittica relativa ai diametri coniugati. (3)

La differenza $CT-CP$ dà $PT=\frac{a^2-x_1^2}{x_1}$ (otteng.),

esponente che rimane la stessa per tutti i possibili valori di b , e però anche quando $b=0$.

(3) Questo teorema ha spesso più volte deducendosi coll'analoga si è provato? Oppure se è solo un esposto di proprietà della ellisse? Essendo questa dimostrata?

$$+ \text{ approssimando } (x, y) \text{ in } (L)$$

Dunque la retta tangente per L e T tang^{ale} il circolo circoscritto in L .

§. 219. L'equazione della normale è (216 e 217)

$$y-y_1=\frac{a^2}{b^2}\frac{y_1}{x_1}(x-x_1)\dots\dots(n)$$

Posto $y=0$ ora da $x_1=CN=\frac{(a^2-b^2)x_1}{b^2}$: quindi

$$CP-CN \text{ ossia } PN=\frac{b^2x_1}{a^2}\dots\dots(\text{seneca}).$$

Si può dunque calcolare MT ed MN .

§. 220. Per tirare la tangente da un dato punto esterno T (Fig. 5a.) che diamo (x_1, y_1) si descrivano due cerchi, uno col centro in P , ed il raggio $PT=a$, l'altro col centro in T ed il raggio TF ; si congiunga P con l'intersezione I degli archi, e tal retta passerà pel contatto M . Facendo centro in P si avrebbe il contatto M' .

§. 221. Sieno AL, BL (Fig. 5a.) corde tirate al punto $L(x_1, y_1)$ del perimetro, dagli estremi del 1.° asse (con può anche sostituirli un diametro), corde che diamo supplementari, e siccome le rispettive coordinate de' punti B, A , sono

$$y=0, x=-a; y=0, x=a, \text{ si avrà (16)} \quad \left\{ \begin{array}{l} y=\sin(x+a) \dots\dots (\text{equazione di } BL) \\ y=\sin(x-a) \dots\dots (\text{equazione di } AL) \end{array} \right.$$

Per verificare la condizione che il punto L sia sul perimetro bisogna supporre che ciascuno delle precedenti, e però anche il loro prodotto, coincida con l'equazione ellittica: in tal caso le corde saranno supplementari. Ma l'equazione

tra il prodotto $\sin'(x_1^2-a^2) = \frac{b^2}{a^2}(a^2-x_1^2)$ di

$\sin'=\frac{b^2}{a^2}$. Dunque allorché le corde sono sup-

elementare si ha $\cos' = \frac{b^2}{a^2}$ e viceversa.

§. 242. Si sostituisce in $a^2y^2 + ab^2x^2 - a^2b^2$

$$x = a \cos \alpha x + b \cos \alpha y, \quad y = a \sin \alpha x + b \sin \alpha y \quad (185)$$

dove uno degli angoli $\alpha x, \alpha y$, si suppone dato e preso ad arbitrio, e facendo $-\alpha$ il coefficiente di α , il che dipende dall'equazione sempre possibile

$$a^2 \cos \alpha \sin \alpha x + b^2 \cos \alpha \sin \alpha y = 0 \quad \dots (1)$$

si avrà l'equazione della ellipse, riferita a due diametri coniugati,

$$(a^2 \sin^2 \alpha x + b^2 \cos^2 \alpha x)x^2 + (a^2 \sin^2 \alpha y + b^2 \cos^2 \alpha y)y^2 = a^2 b^2.$$

Da essa, mediante le successive ipotesi $\cos \alpha = 0, \sin \alpha = 0$, si deduce la lunghezza de' diametri assidotti, cioè

$$\left\{ x^2 = \frac{a^2 b^2}{a^2 \sin^2 \alpha x + b^2 \cos^2 \alpha x}, \quad y^2 = \frac{a^2 b^2}{a^2 \sin^2 \alpha y + b^2 \cos^2 \alpha y} \dots (2) \right\}$$

quindi $a^2 b^2 \sin^2 \alpha$

$$\frac{a^2 b^2}{a^2 \sin^2 \alpha \sin^2 \alpha x + b^2 \cos^2 \alpha \sin^2 \alpha y + a^2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha x + b^2 \cos^2 \alpha \cos^2 \alpha y} =$$

$$= a^2 x^2 \{ \sin^2 \alpha \sin^2 \alpha x + \cos^2 \alpha \sin^2 \alpha y \} + b^2 y^2 \{ \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha x + \cos^2 \alpha \cos^2 \alpha y \}$$

$$= \frac{a^2 b^2}{\sin^2 \alpha (\sin^2 \alpha x - \sin^2 \alpha y)}, \quad \text{cioè} \quad ab = a' b' \sin \alpha \quad \dots (3) \quad \text{e però}$$

Teor. Il rettangolo degli assi equivale al rettangolo tra due diametri coniugati.

§. 243. La precedente espressione di ab congegnata l'equazione (2) ha

$$b^2 \sin^2 \alpha x = a^2 \sin^2 \alpha y + b^2 \cos^2 \alpha x,$$

uguale brevissima larghezza, e prolungando i lati paralleli sino alla circonferenza circoscritta $RR'(-C)$ potrà capersi che le piccolissime corde $r'r', r''r''$ ec., $Rr', R''R''$ ec. coincidono (a. 18) col rispettivo arco: in tale ipotesi si ha ($a\delta$ in fine)

$$a+rR::b:a, \quad r':r'R::b:a; \text{ ec.}$$

$$a+r':r'+R+r'' \text{ ossia } 1:T::b:a.$$

Così $r':T::r':T'$ ec. $::b:a$, e però $r+r'+r''$ ec. $(=E)::T+T'+T''$ ec. $(=C)::b:a$,

$$\text{ed} \quad E=C\frac{b}{a}\left(\text{ovv. } \frac{1}{\frac{a}{b}}\right)=ab;$$

e se a_1, a_2 , sono gli archi di un'altra ellipse E_1 , multa $E=E_1::ab:a_1b_1$, il che significa

Teor. Che le superfici di due ellipse stanno fra loro come il rettangolo del rispettivo assi.

§ 145. Terminiamo ora due applicazioni della formula $y=a^2x+\sqrt{a^2x^2+b^2}$ del § 139.

Fatto anzi l'assi $ax=a$, e indicando il rispettivo valore di y per mezzo delle ordinate Rr, R' (F' 50) ottenisi:

Teor. Il rettangolo delle ordinate di una tangente ellittica, corrispondenti agli estremi A, B dell'1.^a asse, è costante ed $=b^2$.

§ 146. Probl. 1.^o I lati di un angolo retto, che si suppone abbracciare il perimetro di un'ellipse, si muovono scivolando sul perimetro stesso: qual è la curva descritta dal vertice? Soluz.^{ne} Indicando

$$\text{per} \quad \begin{cases} y=a^2x+\sqrt{a^2x^2+b^2} \\ y=a^2x+\sqrt{a^2x'^2+b^2} \end{cases}$$

due tangenti, scritte (fig. 1) $=\frac{1}{2}$ la vna di a'' ed esprimere che s'intersecano ad angolo retto:

dalla 1.^a equa. $x^2y - x + y'(a^2 + b^2x^2)$

traggasi $(x^2y + x)^2 = a^2 + b^2x^2$;

Dalla 1.^a $(y - a^2x)^2 = a^2x^2 + b^2$; e fatta la somma si avrà $y^2 - 2x^2y + a^2x^2 + b^2$. Dunque la curva è il cerchio concentrico il cui raggio $r = \sqrt{a^2 + b^2}$.

§. 147. Probl. 1.^a *Descrivere un quadrato in una data ellisse*. Si trova (F.^a 49.)

1.^a equa. $y'(a^2 + b^2) = CG$, retta che si costruisce prolungando la $ED(x\sqrt{a^2 + b^2})$ in F sinché abbiai $DF = DC = b$, ed abbassando da F la FG perpendicolare sul primo assi AB .

ARTICOLO III.

De' Iperboli.

§. 148. Quando N -co l'equazione $Ay^2 + Nx^2 = Q$ non si suppone anche $Q = co$, prende la forma

$$y^2 = \frac{N}{A}(x^2 - \frac{Q}{N}) \quad (*)$$

Posta la $x = 0$ si ha $y = \sqrt{-\frac{Q}{N}} = b'$, e tirando ymc ,

risulta $x = \sqrt{\frac{Q}{N}} = a'$, tale a dire

$$Am = Q(b')^2; Nm = Q(a')^2.$$

Mutati i segni e fatta la moltiplicazione per $a'^2(b')^2$, si ottiene portata

$$a'^2y^2 - b'^2x^2 = -a'^2b'^2 \text{ ossia } y^2 = \frac{b'^2}{a'^2}(x^2 - a'^2) \quad (**)$$

(*) Se fosse $Q = co$ si dedurrebbe

$$x^2 = \frac{Q}{N}y^2 - \frac{Q}{N}$$

equazione della forma superiore.

(**) Noto che l'equazione diventa di rango nell'ipertica moltiplicata la moltiplicazione di $-b'^2$ per b'^2 .

Supponendo $\gamma = \cos \alpha$, i diametri ac' , ab' si compaiono sugli assi $BA(\infty + a)$ ($F' = b'$), $DA(\infty + b)$. L'equazione $y = \frac{b}{a} \sqrt{(x^2 - a^2)}$ dimostra che al $x = a$ non AB non corrisponde alcun punto della curva, perchè in ogni punto del predetto asse è $x < a$.

Quando diventa l'ipercbola dicesi equilatera, ed è fra la ipercbola ciò che il circolo fra le ellissi.

Si consideri l'asse conjugato ab , qualunque immaginario, per conservare l'analogia tra l'equazione ellittica ed iperbolica.

§. 215. Facendo, come (§14) $a : b :: p$ si ha $\frac{b^2}{a^2} = \frac{p}{a}$, e se dicesi p l'ascissa CF , corrispondente all'ordinata $\frac{1}{2}p = FG$, risulta

$$p = \frac{b^2}{a}(x^2 - a^2), \text{ cioè } \frac{1}{2}p = x^2 - a^2;$$

e perchè $\frac{1}{2}p = b^2$ si ha b , ossia CD , media geometrica fra $BA(\infty + a)$ ed $AB(\infty - a)$. L'arco il cui centro è ed il raggio $AD(\infty - CF = c)$, descrittosi nella verticale indefinita yy la DE in ab .

Dal gli assi si ha $c = \sqrt{a^2 + b^2}$.

§. 216. Calcolando FM , ipotenusa del triangolo FMP , si ottiene

$$FM = \sqrt{\left(\frac{b^2}{a}x^2 - ab^2 + (\sqrt{a^2 + b^2} - a)^2\right)} = \frac{c^2}{a} - a.$$

Così $F'M = \frac{c^2}{a} - a$ e perchè $F'M = FM \cos \alpha$.

Abbiasi una riga $F'M'(\infty b)$ mobile intorno ad F' , e preso un filo ($b - a$) se ne adatti un capo in M' , l'altro in F . Si come

$$F'M' - FMb' = b - [b - a] = a = F'M - FM,$$

la punta di un ago che tonda il filo ed obbli-ghi la riga ad inclinarsi verso Ad , descrive un arco iperbolico.

Una semplice costruzione di simili punti è talvolta preferibile. Descritto un arco col centro F ed un raggio arbitrario AG , indi un altro col centro F' ed il raggio BG , la doppia intersezione M , ne dà due punti della curva.

Prese sulla MF' la $My=MF$ si ha che la $F'F$ in g e la gM sarà tangente M . Infatti per qualunque altro punto n si ha

$$Fn-fn[=Fn-Fn]-cn'/-can: ma gMfgMgMgM;$$

daque qualunque raggio $M'M$, lontano o vicino, diretto al punto F , si riflette in F , e si proprietà comune a tutta la superficie generata dalla rivoluzione dell'arco AMf intorno ad Ac : quindi i punti F, F' dicasi *focchi*;

$FM, F'M$, raggi semia.

Un raggio SM tendente in F si riflette daque verso F' , ed una papilla situate nella direzione MS vede in F il punto luminoso F' .

La retta $CF[=CF'=Vx^2+y^2=c]$ dicasi *asymptotica*: la doppia ordinata ortogonale aPG è il parametro p e si ha $ac:ab:p$.

§. 51. Un calcolo simile a quello del §. 50, dà l'equazione della tangente sotto la forma

$$y-y_1=\frac{p_{x_1}}{p_{y_1}}[x-x_1] \quad \text{ovv} \quad y=\frac{p_{x_1}}{p_{y_1}}x-\frac{p_{x_1}^2}{p_{y_1}}+\dots [x]$$

come pure $y=ay+ay[a^2x^2-b^2]$.

Quella della normale MM' è

$$y-y_1=-\frac{p_{y_1}}{p_{x_1}}[x-x_1] \quad \text{ovv} \quad y=-\frac{p_{y_1}}{p_{x_1}}x+\frac{p_{y_1}^2}{p_{x_1}}+\dots (q)$$

Basta dare $y=0$ nell'equazioni (p), (q) per ottenere

$$x[=CT]=\frac{a^2}{x_1}; \quad PT[=CP-CT]=\frac{x_1^2-a^2}{x_1} \dots \dots (m \text{ma.})$$

$$x[=CN]=\frac{(a^2+b^2)}{x_1}, \quad PN[=CN-CP]=\frac{b^2 x_1}{x_1^2} (m \text{ma.}) (n)$$

$$\text{e quindi} \quad MN=\frac{b}{a^2} \sqrt{(x_1^2 a^2 - a^4)}.$$

§. 252. Per tracciare la tangente da un dato punto T (F. 55) si descriva col raggio TF l'arco FIL , indi un altro NP col centro P ed il raggio ma : per P e pel punto I ove gli archi s'incontrano, condurrasi la trasversale PIQ ; il punto M in cui essa taglia l'iperciclo si congiunga con T , e la TM sarà tangente in M .

§. 253. L'ipot. $x_1 \text{ma}$ in $a - \frac{a^2}{x_1}$, espressione di $AT[=AC-CT]$ (F. 56) dà $AT=ma$: dunque se si suppone il costante ad un'infinita distanza nel vertice, la tangente, che indichiamo per CT e diciam divistato, passa pel centro: per determinare ACP sia Ad perpendicolare in A : sulla proiezione

$$AT\left(-\frac{ax_1^2-a^2}{x_1}\right) : PT\left(-\frac{x_1^2-a^2}{x_1}\right) :: Ad : PM\left(-\frac{b}{x_1} \sqrt{x_1^2-a^2}\right)$$

si trova $x_1 \text{ma}$ e si scopre che Ad degenera in Ad ed è mb : quindi $\tan ACP = \frac{b}{a}$, l'equazione degli angoli CP', CP'' , è $y \text{ma} = \frac{b}{a} x$.

(*) Questa espressione ridotta alla forma ora data, relativa all'ellisse, si dunque reggeva ad esprimere la legge per cui varrebbe che l'angolo ϕ^2 ha $-d^2$ per valore all'iperciclo la formula spaziale dell'ellisse.

§. 154. Per riferire l'iperbole agli asintoti sia
 Cens, Ma (parallela a CP'')=a! Sostituiamo

$\dot{a}x=\dot{a}x', \dot{a}y=\dot{a}y'$, si ha

$$\cos \dot{a}x'(\cos \dot{a}x'-\cos \dot{a}y')=\frac{b}{\sqrt{(a^2+b^2)}}$$

$$\cos \dot{a}x'(-\cos \dot{a}y')=-\frac{a}{\sqrt{(a^2+b^2)}},$$

e le note formole

$$x=\cos \dot{a}x'+\sin \dot{a}x', y=\sin \dot{a}x'+\cos \dot{a}x'$$

divengono $x=\frac{a(1+a)}{\sqrt{(a^2+b^2)}}, y=\frac{b(1-a)}{\sqrt{(a^2+b^2)}}$.

Pongasi $[(a^2+b^2)](a(-a))^2=a^2$, e sostituendo la rispettiva espressione d' x, y in $a^2y^2-b^2x^2=a^2b^2$ si avrà $\cos a^2$ equazione ridotta. Essa può ridursi fra gli elementi

$$Ma(-a'), Ma'(-a'), PCP''(ab), Cens(-1)$$

ricevendo $a'=\frac{\sin(L+P')}{\cos L}a', a=\frac{\cos L}{\sin L}a'.$

Trasportate l'origine in I, punto medio della Ca, se si fa Cens la nuova si cambia in $a'=\frac{1}{2+a'}$, e diventa essere L, a , quantità inverse, i cui rispettivi limiti sono $\infty, 0$.

Condotta AE parallela a CP', i triangoli CLA, C'A sono isosceli, AL=AL', AL'CF è loango e si ha

$$a^2(-CLAL'=(CL)^2)=(AL')^2 \text{ potenze dell'iperb.})$$

Quando tende la loango diventa un quadrato $a=\cos^2 a^2$.

Moltiplicando $\cos a^2$ per $\cos PCP''$ si ha $\cos AL'Ca=\cos AL'CF$, e con ADDE=ipse AL'CF.

268

§. 255. Sieno Na , Qq (F : Sq) perpendicolari al 1.^o lato triangolo, Ac , e tirasse

$$PQ = \frac{b}{a}x, QR (= PQ - PR) = \frac{b}{a}(x - \sqrt{x^2 - a^2}),$$

$$Rq = \frac{b}{a}(x - \sqrt{x^2 - a^2}), \text{ si avrà}$$

$$QR.Rq = \frac{b^2}{a^2}(x^2 - (x^2 - a^2)) = b^2;$$

Così $NM.Mn = b^2$: d'altronde $QR.Rq = qm.mQ$: dunque $qm.mQ = NM.Mn$. Una 2.^a trasversale $FAmG$ dà

$$mQ.MN :: mF.MF; Mn.mq :: MG.mG;$$

e perchè si è tirata $mQ.MN :: Mn.mq$, risulta

$$mF.MF :: MG.mG; \text{ quindi}$$

$$mF.MF (= Am) : MF :: MG.mG (= Mn) : mG,$$

cioè $MF = mG$. Perciò, trasportando parallelamente la FG finchè divenga tangente in e , si ha $ae = e$.

La tangente prolungata sino agli assintoti è dunque biseccata nel contatto.

§. 256. Con un calcolo simile a quello del §. 255, si può, come sostituendo $-b^2$, $-b^2$ per b^2 , b^2 (255) si osserva che sussistono per rapporto al problema due teoremi analoghi a quelli dei citati §. 255, 256, cioè

$$ab.m'b'.m'a', a^2 - b^2.mg^2 - b^2;$$

Si unisce alle precedenti l'equazione

$$a^2 \tan^2 \alpha \sin^2 \alpha - b^2 \sin^2 \alpha$$

analogo all'equazione (1) del §. 255 citato, per risolvere il problema. Dai tre degli elementi

$a, b, a', b', \alpha, \alpha'$, determinare il valore degli altri.

Della Parabola.

§. 267. L'equazione $y^2 = px$ (con $a, c = 1$) mostra che la parabola passa per l'origine A (F' di AB), che i quadrati delle ordinate MP stanno come le ascisse; e che $FM = PM$.

Indicando la retta AP con l'ordinata rettangolare FG , e dicendo e la sua ascissa AF , si ha $\frac{1}{2}p^2 = p \cdot e$ ossia $p = 2e$; dunque la richiesta linea retta AP equivale all'ascissa ed è doppia dell'ascissa.

§. 268. Per far sì che la distanza fra' il punto $M(x, y)$ ed un punto interno a

$$\text{sia } d = \sqrt{(x-a)^2 + (\sqrt{px}-y)^2}$$

sia razionale, la d suppone supporto $y_1 = 0$ ed $x^2 = (p-ax)x + x^2$ un quadrato, vale a dire $x^2 = (p+ax)^2$ ossia $x_1 = \frac{p}{a}$. Dunque a esiste nell'asse AX , è distante dal vertice della quantità $AF = e$, e si ha

$$d = FM = \sqrt{(x-\frac{p}{a})^2 + px} = ax + \frac{1}{2}p.$$

Sul prolungamento di AX prendasi $AB = AP$; per B si tiri la BD , per M la ML perpendicolare a BD come questa ad AX , e si avrà

$$ML = BF = FP = AF = AP = \frac{1}{2}p + ax = FM.$$

La BD si chiama direttrice:

Nel punto F di una squadra BLF si formi un filo unito FP ; l'altro capo sia in F , e la punta di un ago che applichi il filo nel braccio FL mentre l'altro BL scorre lungo la BD , segnerà nel piano ADB una parabola, la cui tangente in P dipende dalla BF .

Sia E il punto medio di FL , si conduca la $T'E'$; da un suo punto m si tirino mF , mL , sarà mQ perpendicolare a BL' , e perchè $mF' = mL'$, mQ , sarà m fuori della parabola, e nel suo perimetro il solo punto Ad per cui la $T'AT'$ è tangente in M . Ma $FML = EML = PMT'$; dunque qualunque raggio PM parallelo ad Ax si riflette in F , che perciò dicono fuoco; per cui il cui uso catottico è *stentor-facile*, si rende interessante, se abbinati uno specchio generato dalla rivoluzione di una semiparabola AMF intorno all'asse Ax . Il celebre Focifaro, che del foro di Alessandria additasse ai naviganti l'ambasciatura di quel porto, era un'ingegnere applicatore dell'esposto principio.

Per tirare la tangente da un punto esterno m' si descriva un circolo col centro in m' ed il raggio $m'F$; per L dove ha centro BL' conducatte la parallela ad Ax , e la sua intersezione col ramo AL' duci il contatto M . Infatti $MLm' = MF$, ed è $m'L = m'F$ per costruzione; dunque

$$m'AL = m'LF; \text{ e perchè } m'AL = m'AP \text{ risulta}$$

$$m'LF = m'AP.$$

§. 259. La eliminazione d'y fra $y^2 = ax$ ed

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

dà $y^2 = ax = m^2(x - x_1)^2 + 2mx_1(x - x_1) + x_1^2$; quindi

$$x = \frac{1}{2m^2} \left\{ m^2 x_1 + m y_1 + \frac{1}{2} m^2 \sqrt{(m^2 x_1 - m y_1 + \frac{1}{2} x_1^2)} \right\}$$

e la trasversale diviene tangente quando i valori d' x sono eguali, il che suppone:

$$m^2 x_1 - m y_1 + \frac{1}{2} x_1^2 = 0, \text{ cioè } m = \frac{1}{2x_1} \left\{ y_1 \pm \sqrt{y_1^2 - x_1^2} \right\};$$

ma se il dato punto (x_1, y_1) è sul perimetro parabólico il radicale senesico è nullo, e resta $\frac{y_1^2}{4p}$, dunque l'equazione della retta che tocca la parabola nel punto (x_1, y_1) è

$$y - y_1 = \frac{y_1}{x_1}(x - x_1) \text{ ossia } y = \frac{y_1}{x_1}x + (y_1 - \frac{y_1^2}{x_1}) \quad (r)$$

e per trasformarla in $y = mx + \frac{p}{m}$, equazione analoga a quella espressa con la formula (m') del §. 267, basta rappresentarsi la tangente per $y = mx + n$, chiamare y fra questa ed $y^2 = px$, e rendere uguali i valori d' x .

La normale MN ha per equazione $(16a)$

$$y - y_1 = -\frac{2x_1}{y_1}(x - x_1) \text{ ossia } y = -\frac{2x_1}{y_1}x + y_1 + \frac{2x_1^2}{y_1} = \dots \quad (s)$$

L'ipotesi $y=0$ nell'equazione (r) dà $x_1 = -x$ cioè $AT = AP$, e $PT (= AT + AP) = 2x$ (rettang.)

Farendo $y=0$, mediante la sostituzione di px' per y_1^2 nell'equazione (s) , si ha x ossia

$$AN = \frac{1}{2}p + x_1; \text{ perciò}$$

$$PN (= AN - AP) = \frac{1}{2}p \text{ (semicirc.)}$$

$$MN (= \sqrt{(y^2 + PN^2)}) = \sqrt{p(x + \frac{1}{2}p)} \text{ (norm.)}$$

Da' triangoli simili AEF , TEF si deduce

$$\frac{FE}{x} = \frac{FT}{\frac{1}{2}p} = \frac{FM}{x} \text{ ossia } FM,$$

e perchè FE è perpendicolare ad MT si verifica: che le perpendicolari dal fuoco sulle tangenti stanno in ragione reciproca de' raggi senoid.

§. 268. Per passare dagli assi rettangoli Ax , Ay agli assi obliqui MP , MT , si osservi:

1.^a che quando $\angle x = 0$, il sistema I del §. 267

$$x = \alpha + \beta \cos \alpha, x, y = \beta + \alpha \sin \alpha, x$$

2.° Che si ha $\beta^2 = \alpha p a$, e perciò $\frac{\beta}{\alpha} = \frac{p}{a}$.

3.° Che $TP:PM$ ossia $\alpha:\beta::1:\tan \alpha, x$, vale a dire $\tan \alpha, x = \frac{\beta}{\alpha}$; quindi

$$\cos \alpha, x = \frac{p}{\sqrt{p^2(1+p^2)}} \text{ e la trasformata}$$

$\cos^2 \alpha, x \alpha^2 = \{ (\beta \cos \alpha, x - p \cos \alpha, x) \} \alpha p + p a - \beta^2$ si riduce ad $\alpha^2 = (4p - p^2) \alpha$; dunque:

Teor. Ogni diametro MP biseca le corde NY , parallele alla tangente condotta pel suo vertice, ed il suo perimetro

$$4p + p^2 = 4(AP + AB) = 4(ME + MP)$$

è un'al quadruplo della distanza tra l' fuoco ed il vertice.

Ecco un' elegante dimostrazione sintetica della 1.ª parte di questo teorema.

Essendo (Fig. 13) NC parallela alla retta tangente in M , ed MP un diametro e perciò parallela all'asse Ax , si prolunga PM sino alla DO' in E ed EP sino alla NC in I , e si conducano NQ', CG , perpendicolari alla DO' . Siccome $(\text{v. 58}) NQ' = NP$ e $CG = CP$, se si descrivono coi centri N, C e coi raggi NQ', CP , due cerchi, il 1.° toccherà la DO' in Q' e taglierà la EP in un 2.° punto H , e perciò $MP + MQ' = NH$, sarà $PI = HI$ e $CF = CH = CG$, il 2.° cerchio passa dunque per H e per G e tocca la DO' , e si ha

$$EF.EH = (Q'E)^2 = (EG)^2, \text{ cioè } Q'E = EG;$$

ed la linea della parallela NQ', EE, CG ,

$NE:RC::DE:EG$, vale a dire $NE=RC$, come es.

§. 161. Ripartita la QA in C (F' Ge) si tira il diametro PC e si congiunge P con Q ed R : si biscehi PR in C' e tracciato il diametro $P'C'$ si unisce P' con P ed R . Condotta la $P'C'$ parallela a QR , in forza della $a^2=(pa-pq)^2$ risulta $Pc:PC::(aP')^2:(CR)^2$; e perchè

$$aP':aC'=CC':\frac{1}{2}CR, \text{ si ha } Pc=\frac{1}{2}PC.$$

D'altronde $Pc=\frac{1}{2}PC$: dunque

$$aP'=Pc=\frac{1}{2}Pc'=\frac{1}{2}P'C, \text{ e però}$$

$$\begin{cases} \text{trig } P'AC'::\text{trig } C'AC'::PC':CC'::1::a \\ \text{trig } C'AC'::\text{trig } P'AC'::(C'C')^2:a(PC')^2::1::a^2 \end{cases}$$

Quindi $\text{trig } PAC=\text{trig } P'AC'$, e moltiplicando

$$\text{trig } QPR=\text{trig } PPR.$$

Preceduti alla biscezione delle PA, PP' , ec. e si trovano $\text{trig } PPR$ ottuplo di ciascuno de' due trigoni inscritti, ed inscritti nelle PP, PR , e così ec. Avvertasi che le biscezioni C', C' danno due trigoni; quattro le biscezioni delle PA, PP', Pp, pQ ; otto quelle delle corde rimanenti, ec. e si concluderà contro lo spazio

$$QAPPRQ=\text{trig } QPR(1+\frac{2}{3}+\frac{2^2}{3^2}+\frac{2^3}{3^3}+\text{ec.})$$

$$=\text{trig } QPR(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}+\text{ec.})=(\text{Ge})\frac{1}{3}\text{trig } QPR.$$

Quando la QA è perpendicolare all'asse AN come la $Q'A$, si ha $Q'M:AN::\frac{1}{2}\text{trig } Q'AN=\frac{1}{2}\text{rectang. } NQ'$ ed $HA:PB::\frac{1}{2}xy$, che uguale a $\frac{1}{2}$ del rettangolo fatto dalle coordinate coniugate che determinano l'area parabolica.

§. 162. Probl. 1.^o Dato un circolo di grandezza e di posizione, e per rapporto ad esso una retta, trovare la linea che comprende i centri

di tutti i cerchi che toccano l'uno o l'altro.

Soluzione. Collocata l'asse Ax sulla retta data, si faccia passare Ay per la perpendicolare CA (m) (F' 61) condotta dal centro C del dato circolo, il cui raggio r , e supposta C' il centro di un circolo richiesto formata la $C'M$, (perpendicolare ad Ax) $=y$, $AM=x$, e si tiri $C'D$ parallela ad Ax . Si come

$$C'D=AM=x, \quad CC'=CB+C'M=x+y,$$

$$\text{e } CD=CA-DA=CA-C'M=m-y, \text{ risulta}$$

$$(m+y)^2=(m-y)^2+x^2, \text{ cioè}$$

$x^2=m(p+y)p-x^2-p^2$, equazione della parabola.

§ 253. Probl. 1.^a È dato un punto $M(x, y)$ e si domanda le linee dei centri di tutti i cerchi che passano per M e toccano l'asse Ax .

Soluz.^{ne} Sia (x, y) il centro C di uno dei cerchi richiesti, r il suo raggio, e tirata da C la perpendicolare sulla Ax si avrà un triangolo rettangolo in cui $(x-x)^2+(y-y)^2=r^2$; e perchè la retta che unisce il centro C col contatto sull'asse Ax è nel tempo stesso mr ed mx , sostituita x per r si ottiene l'equazione parabolica $y^2-xy-axx+x^2-y^2=0$.

§ 254. Probl. 2.^a Si domanda la linea che viene descritta dal vertice di un angolo retto, il cui lato scorre sul perimetro di una parabola.

Soluzione. Indicando una tangente per

$$y=mx+\frac{p}{4m} \quad (255) \quad \text{e } y=-\frac{1}{2m}x-\frac{1}{2mp}$$

quella della tangente ad una perpendicolare. Togliendo la 1.^a equazione dalla 2.^a, il che suppone la loro consistenza, e finita il calcolo all'intersezione, si ha

$$0=(m+\frac{1}{2m})x+\frac{1}{2}p, \text{ cioè } x=-\frac{1}{2}p,$$

valore che caratterizza la direttrice.

Costruzioni dell'equazioni del grado 3.^o e del 4.^o

§. 165. Per risolvere ad un problema geometrico dipendente da una dell'equazioni

$$x^3+ax^2+bx+c=0, \quad x^4+ax^3+bx^2+cx+d=0,$$

dove a, b, c debbon' essere di una dimensione rispettivamente doppia, tripla, quadrupla, la d'opera determinare con metodo geometrico tante linee rette eguali ai rispettivi valori reali d' x , e ciò si ottiene nella maniera seguente. Sosta l'equazione di una parabola x^3+apx si chiami x^3 ed ax^2 della a' delle proposte, e la curva espressa dalla risultante $p^3y^3+apxy+bx+c=0$ incontrerà la parabola proposta in tanti punti, quanti sono i reali valori d' x , perchè il sistema

$\{x^3+apx \dots (1); \quad p^3y^3+apxy+bx+c=0 \dots (2)\}$ mediante la eliminazione d' y produce appunto l'equazione di cui si tratta: per conseguenza le x rappresentano le radici corrispondenti alle intersezioni, e queste, (sempre intesi da immaginari quando le x sono reali, perchè y è di 3.^o grado nell'equazione x^3+apx) sono due e quattro come i reali valori d' x . Basta dunque costruire insieme le curve (1), (2), ed a tale oggetto si riduce la a' ad una più semplice forma, eliminandosi il 3.^o termine con fare $y=2+\frac{b}{ap}$, il che dà

$$x^3+\frac{b}{p^2}\left(\frac{4apx^2}{3p^2}-x\right) \dots (3)$$

Se $a-c$ si alza sull'asse Ax la perpendicolare $ac=\frac{b}{ap}$; per la sua simmetria si trarà ad Ax la pe-

calata, che sull'asse della x : si fa zero in (5) per averne il vertice, che resta determinato dalla $x=(q-m^2):4b$. Così nella stessa par descrivere la parabola (3), di cui si conosce il vertice, l'asse ed il parametro $\frac{1}{p}$. Descritta l'altra parabola (1) col vertice in A , l'asse Ay ed il parametro p , si appaiono le sezioni corrispondenti alle intersezioni delle due parabole, e delle corrispondenti le soluzioni richieste. Quando le soluzioni non sono che due, l'asse della parabola (5) passa al di sotto di Ax ed a tal distanza, che il suo ramo inferiore più non giunge alla parabola (1). Non esiste soluzione se $\frac{b}{ap}(>0)$ tanto sia grande, che la parabola (5) cada interamente al di sotto di Ax .

§. VII. Lo stesso intento può anche conseguirsi per mezzo dell'iperbola equilatera e del circolo.

Giacchè a due curve di quadruplici dimensioni cioè della forma ax^4+by^4 , e può dedursi $ax^4+ay^4=0$, $y^4=0$, scrivasi $x^4-ax^2+bx-cx^2+cx^2=0$, ed assumta l'ausiliaria $xy=cd$ si trasformi l'antecedente in $x^4-ax^2+bx+cx^2y^2=0$. Mediante la divisione per x^2 si vedrà che essa equivale ad

$$x^2-a+\frac{b}{x^2}+y^2=0, \text{ cioè all'equazione circolare}$$

$$x^2+y^2+\frac{bx}{a^2}-a=0, \text{ la quale facendo } p=a+\frac{b}{2a^2}$$

si riduca a $x^2+y^2=a-\frac{1}{2}\frac{b^2}{a^2}$, e dimostra che il

raggio è $=\sqrt{a-\frac{1}{2}\frac{b^2}{a^2}}$. Per rinvenire la posi-

zione del centro si concepisca (Fig. 11.) traslo-

cata il sistema degli assi in guisa che l'origine α cada in q , il che riduce tutto nell'equazione (a) del §. 225. e poi ax (F. 11.) solvibile fino a considerare con la ax . Posta la $Caue = \frac{b}{cd}$ la citata equazione diventa

$$\left(y - \frac{b}{cd}\right)^2 + x^2 - ax + \frac{b^2}{c^2d^2} = 0,$$

equivalente ad $y^2 - \frac{b}{cd}y + x^2 - ax = 0$. Ma fatto

$$y = z + \frac{b}{2cd}$$

si ottiene $z^2 + \left[\frac{b^2}{c^2d^2} - \frac{b}{cd}\right]z + x^2 - ax = 0$

ovvia $z^2 + x^2 - ax - \frac{b^2}{c^2d^2} = 0$, equazione proposta.

Donque il centro del circolo richiesto è nell'estremo della retta $ax = \frac{b}{cd}$, tirata per l'origine nella direzione delle y negative.

La costruzione della $x^2 + ax + b = 0$, moltiplicata per a , dipende dal metodo del §. 255, e si tratta come la general equazione di 4.^{to} grado nell'ipotesi che sia $c = 0$.

Problema. Si domanda un cubo doppio di un cubo dato. Soluz.^{ne} Si come nella progressione $a:ar:ar^2:ar^3$ sta $a^3:(ar)^3::a:ar^3$, chiamando a, y i termini intermedi ar, ar^3 , e facendo $ama, ar^3 = a$, basta determinare geometricamente la retta a, y per mezzo dell'equazioni $a^3 = y, y^3 = ma$; e perchè il ricerca più facilmente si descriva della parabola, disegnata questa, cioè $y^3 = ax$, giova costruire le sue intersezioni col circolo $y^3 + x^3 - y - ax = 0$, equazione che si ottiene sommando quelle del problema: e posta

$$x = m + t, y = m + \frac{1}{t},$$

diviene $m^3 + t^3 = 1 + \frac{1}{t}$.

Si prende nell'asse della parabola prescelta un'arbitra $m = t$, al suo estremo s'innalza la per-

pendicolare $-\frac{1}{2}$, e la retta che congiunge il vertice della parabola con la sommità della perpendicolare, costante il raggio del circolo richiesto; circolo il cui centro è nella sommità della predetta perpendicolare. Le coordinate del punto dove la parabola è intersecata dal circolo, prescindendo dal vertice parabolico, sono le medesime proporzionali soddisfacenti al problema. Essi è celebre perchè proposta dall'arcade di Dole agli abitanti di quell'isola, che lo consultavano per sapere quanta sarebbe durata l'influenza pestilenziale che infestava la loro patria. Cessò la peste quando avete calcolato l'altre. (Essi era cubico e di oro.)

È singolarmente ingegnosa la soluzione geometrica immaginata dall'ingegnere Geometa Archimede di Tivoli.

§. 167. Prescelta com'equazione parabolica anzichè la $my = x^2 + ax$ si ha $x^2 = (my - ax)^2$: l'equazione di 4.^a grado si cangia in

$$m^2y^2 - 2mxy + (a + m^2)x^2 + bx + cm = 0,$$

e togliendone $mp(my - x^2 - ax)$, cioè si moltiplica mp dell'anzichè, si ottiene

$$m^2y^2 - 2mxy + (a + mp + m^2)x^2 + (b + m^2p)x - m^2py + cm = 0$$

Ma questa si riferisce alla parabola, all'ellisse, all'iperbole, al circolo, secondo che abbiamo (§. 151)

$$a + mp = 0, \quad a + mp > 0, \quad a + mp < 0; \quad cm = 0 \quad e \quad p = m - \frac{a}{m} \quad (*)$$

$$(*) \text{ vale a dire } x^2 + ax + \frac{b}{m}x - \left(m - \frac{a}{m}\right)p = -\frac{c}{m} \quad \text{si ottiene}$$

$$\text{ovvero} \quad \left(m - \frac{a}{m}\right)^2 + \frac{b^2}{m^2}, \quad \text{ovvero}$$

$$\left(x - \frac{1}{2}m + \frac{a}{2m}\right)^2 (-m^2) + \left(x - \frac{1}{2m}\right)^2 (-m^2) = \frac{b^2}{m^2} - \frac{c}{m} + \frac{a^2}{m^2} (m^2)$$

Dunque le risultanze di un'equazione del terzo grado e del quarto, possono costruirsi per mezzo di una parabola combinata con una delle curve di n° grado. Basta un cenno per vedere che due cerchi sono bastati alla costruzione di cui si tratta. Abbiam i cerchi

$$(y-\beta)^2+(x-\alpha)^2=r^2, \quad (y-\beta_1)^2+(x-\alpha_1)^2=r_1^2.$$

Tolta la $1.^a$ dalla $2.^a$ si ha

$y=[\alpha_1^2+\beta_1^2+r_1^2-\alpha^2-\beta^2-r^2+\alpha(\alpha_1-\alpha)]:(\beta-\beta_1)$
e questa espressione sostituita in una delle proposte somministra un'equazione di n° grado; dunque le intersezioni di due cerchi non possono essere più di due, e però le soluzioni corrispondenti rivelano il quadruplice significato competente all'incognita di un'equazione di 4° grado.

CAPITOLO VII.

Delle Curve trascendenti e di alcune di un grado superiore al n° .

§. 168. Oltre i problemi geometrici che dipendono dalle curve algebriche di n° grado, e che gli antichi dissero problemi soluti, perchè rappresentavano necessaria la compensazione delle superficie conche su cui le contenevano, incontravansi altri irrisolti, da cui detti *lineari*, per la costruzione de' quali si richiedevano curve di un grado più elevato, o non esprimibili col soli simboli dell'algebra algebrica. Tralasciata la discussione dell'equazioni generali del 5° e del 4° grado ha le indeterminato x, y , diventava meno interessante ma complicata e difficilissima, di esigerebbe pel 5° grado la diste-

zione di solidi generi, ciascuno suddivisibile in molte specie, ci proponiamo di dare un'idea di alcune fra le più rinomate curve trascendenti, e di far menzione di quelle tra le curve di un grado superiore, che hanno meritata in qualche guisa l'attenzione de' Geometri.

La prima nozione di una curva può concepirsi in quattro maniere:

1.^a Immaginando un meccanismo atto a disegnare la sua moto scorrente, qual'è quello del § 214.

2.^a Per mezzo di una serie di punti suoi tra loro vicini, e collocati a formare di una certa legge per tutta costante:

3.^a Considerando le y , corrispondenti a moltissimi successivi valori d' x , in un'equazione formata ad arbitrio, e dedotta dalle condizioni di un dato problema.

4.^a Mediante la sezione di una superficie curva, di una sfera, per esempio, di un cono, di un cilindro ec. fatta con un'altra superficie piana o curva, perchè di tal sezione possa determinarsi una proprietà caratteristica, e questa ammetta un'adecua espressione simbolica. Tale fu la prima origine delle curve di 2.^o grado, che i geometri anteriori a Platone riconoscevano nelle sezioni di un cono retto, fatte con un piano diversamente inclinato sull'apoteima; indagare da noi trascurato perchè spettante alla teoria delle superficie curve.

§. 214. Alzate in ogni punto di una indefinita retta Ax le rispettive perpendicolari, prenduti tal lunghezza va crescendo, partendo sempre dal suo piede, che la prima in A , con $x=0$, sia m , e le altre insieme con essa costituiscano una progressione geometrica, e congiunte le sommiche di tutte si addebrerà una curva, chiama-

ta *logarithmica* e *logistica*, le cui ordinate hanno per logaritmo le rispettive ascisse; curve che è il simbolo geometrico d'ogni sistema logaritmico, ed ha per equazione $x = M.y$ ossia

$x = p^{\frac{y}{d}}$, d'onde $y = \frac{x}{p} \log p$; e posto $a = \log p$, $y = \frac{x}{a} \log p$ (45), dove la costante d esprime il modulo. Siccome ad a^{∞} corrisponde (69 n.° IV.) $y = \infty$, alla destra dell'origine la *logarithmica* si distende indefinitamente dall'asse Ax : in simil guisa si si accosta nello spazio alla sinistra, senza mai toccarlo, perchè l'asintotismo d' y suppone $x = -\infty$.

§. 170. La *logarithmica* può descriversi con molto facilità, e ciò per mezzo dell'apposito strumento ideato dal marchese Poleni: il seguente metodo serve a tracciata per punti.

Dividasi una retta in piccole parti uguali e sieno

$$1, 2, 3, \dots (n-1), n, \dots (m-1), m,$$

i punti di divisione: in ciascuno d'insalzi la perpendicolare; prendasi l'ultima verso la destra di un'arbitraria graduata, e si congiunga la sommità s dell'ultima perpendicolare anzidetta con un intermedio punto di divisione, n per esempio; il punto s , in cui la penultima perpendicolare è tagliata dalla detta sn si nomini col punto $n-1$: questa retta $s, (n-1)$ segnerà l'antepenultima perpendicolare in un punto s_1 ; proseguasi quanto basta ed i punti s, s_1, s_2 ecc., tutti spettanti alla *logistica*, segneranno la traccia per l'approssimativa descrizione della medesima. (*)

(*) Addiversi sistemi di meglio scegliere l'angolo di questa obliquità e descrivere qualche figura.

alla

§. 171. Il proceduto metodo suppone costante il valore della tangente, e tal verità si assume sulla seguente maniera.

Quando x subisce una variazione dx , da dy quella d' y ; nell'equazione

$$\left\{ \frac{ax+b}{a} - x \right\} \frac{\beta}{2a+\beta} + \frac{1}{2} \left(\frac{\beta}{2a+\beta} \right)^2 \text{cc.} \} \quad (57)$$

pongasi $ax=y$, $\beta=dy$ e sarà

$$dx^2 \frac{dy}{y} \left\{ \frac{ax(y+dy)-L_y}{y} \right\} \text{cioè } dL_y = \frac{dy}{y + \frac{dy}{2}} + \frac{1}{2} \left(\frac{dy}{y + \frac{dy}{2}} \right)^2 \text{cc.} ;$$

che fatta la dy infinitesima diviene

$$(58) \quad dL_y = \frac{dy}{y}.$$

Ora la differenza tra le due

$$x+dx = dL(y+dy), \quad x = dL_y, \quad \text{da}$$

$$dx \left(\frac{ax+bx}{y} \right) = dL_y, \quad \text{cioè } dx = dL_y, \quad \text{ed } \frac{dx}{dy} = \frac{1}{y};$$

quando le dx , dy sono infinitesime tali per uno i lati del poligono (cioè n. 13), e la formula $\frac{dx}{dy}$

coincide con quella della tangente (cioè): dunque cc.

§. 172. Se un circolo toccato in A da una retta orizzontale ($F: G_1$) venga spinto in giù, che la circonferenza successivamente vi si applichi senza strisciare, il punto A gradatamente d'innalza sino all'altezza del diametro verticale DE , per deprimersi poi sino a toccare sulla retta in B , ed in forza di tal moto, composto di traslazione e di rotazione, descrive una curva di cui AB è la base; ED , perpendicolare dal vertice E sulla metà di AB , l'asse: curva celebre, sì per le continue d'ineguaglianze geometriche che per le singolari sue proprietà meccaniche.

rieta, e ben nota anche al Cardinale Niccolò di Cusa (**), sotto il nome di *Ciclotide*. Quando prevale il moto di traslazione si ha la ciclotide allungata; l'accorciata se prevale quella di rotazione; sostituendo alla retta AB una circonferenza circolare ottienesi una curva ben diversa che dicemmo *epitrochide*.

§. 273. Ogni cerchio, parallelo alla base, passando per la natura della cycloide bipartita dell'arco (**), la metà di una, come FGH può riguardarsi come l'ordinata ortogonale y , la cui sezione EH con EQD è il circolo generatore, considerato nella metà del suo corso. Nanti che l'uguaglianza degli archi EH , GQD produce $\overset{\frown}{AF} = \overset{\frown}{ADG}$; che quindi se tirasi FI parallela alla GD ed $FG = ID$; si avverta che $AI = ar.FH$, giacchè A si trasferisce in F mediante la rotazione, che ha successivamente combaciato l'arco FHI con AI , e siccome $AD = EGQD$, si concluderà essere $ar.GE$ cioè $am.ID = FC$; dunque detto r il raggio CE ,

$$[y \cos \alpha - r \sin \alpha, \sin(1 - \cos \alpha)]$$

$(y \cos \alpha)^2 \sin \alpha - a^2$ ed $y \cos \alpha \sqrt{a^2 - a^2 \sin \alpha}$, (eq. della cic.)
dove a può esprimersi per $ar \cos \alpha \sqrt{a^2 - a^2 \sin \alpha}$.

§. 274. Quando con si persegue la necessità necessaria per descrivere la cycloide con moto continuo, riesce opportuno il seguente metodo.

Divisi la semibase AD in un certo $n.$ di parti eguali, ed in altrettante la circonferenza del circolo DCE , dal punto D si tirino le cor-

(*) Egli ne fece menzione in un Opuscolo dedicato al Sommo Pontefice Niccolò P. Marci da anni 51 nel 1584.

(**) La tangente del punto F che prende da E in H coincide con quella che esso dovrebbe risultando da F in H — ma questo non può differire dal nome AFH , la cui dimostrazione è contenuta dunque in

da ai punti di divisione: da ogni punto I si condurrà la parallela alla corrispondente corda EG , ed il punto F in cui la parallela suddetta varrà sopra del prolungamento dell'ordinata GI sarà nel perimetro cicloidale.

§. 175. Condotta l'ordinata MLN vicinissima alla FGH si tirerà FM parallela all'archetto GE , e si descriverà la tangente in G prolungata finchè incontri nel punto T la tangente in F , che si prolunga al prolungamento dell'archetto MF . Siccome anche la GT è il prolungamento dell'archetto LG , sono simili i triangoli MFm , FTG : ma $Mm = FM$ perchè $ML = FG = ar. LG - ar. GE$:

daunque $FG = GT$: d'altronde $E\hat{G}H = E\hat{G}T$: per conseguenza FT parallela alla corda GE , e per finire la tangente in un dato punto F del perimetro cicloidale si disegnerà la corda GE , e la parallela ad essa per F è la tangente richiesta.

§. 176. Alzando gradualmente l'estremo A di un filo inestensibile, applicato alla convessità di una data curva $ALNG$ (P.^a 63.) si descrive una curva $ABCDN$, che dirassi sviluppante per rapporto alla proprietà che s'è la sviluppante: i successivi tratti BL , CN ec. del filo stesso in linea retta, (raggi osculatori e di curvatura della 1.^a curva) costituiscono altrettante tangenti della 2.^a Diciamo che i predetti raggi sono perpendicolari alla sviluppante. Sia la retta PQ perpendicolare all'estremo C del raggio CN , e qualora si prenda che tutti i punti della PQ , costruito C , sono fuori della curva ACN , sarà certa che la PQ è tangente in C , ed in conseguenza che CN è perpendicolare alla sviluppante ACN nel predetto punto.

Preso un punto B intermedio a C ed A , si descriverà il raggio BL prolungato fino al sog-

gio CH in I , e si tiri la corda LN , indi la retta HBM , che incontri la PQ in M . La retta HM , come obliqua alla PQ , è $> CH$; ma $CH = ar. ALH$, $BL = ar. AL$, e $LN = ar. LH$, e perciò la spessata BLN , e molto più la $BN < CH$; dunque il punto M è oltre la concavità della sviluppante. Passando a considerare un punto D , situato al di là del punto C , si descriva il raggio FD che incontri CH in E , PQ in N . La EN , come obliqua alla PQ , è $> CE$; ma $DEF = CH = ar. HF$; e perchè la spessata $HE + EF > ar. HF$, si ha $DEF < CH + EF$ ossia $DE < CH + EF$; dunque il punto N è fuori del perimetro; dunque ec. Or è facile il provare che nin' altra curva condotta per A può seguire ad angolo retto i raggi LB , RC , FD ec., perchè ciò subito si vedeva, sostituendo alla sviluppante un poligono di piccolissimi lati, ed assumendo la vera della nuova curva un altro poligono come sopra, che abbia un vertice nel punto A , come nel precedente. Dunque si può stabilire: che una curva è la sviluppante di un' altra, quando è perpendicolare a tutti i raggi circolari: derivati dallo sviluppo di questa.

§. 177. Sia la semicircolo BGD (F. 64.) il cui asse BA , la semibase AD , e prolungata la DC , eguale e parallelo alla BA , sia in F tale che $CF = CD$, supponasi descritta una a' semicircolo FME , eguale alla a'; pel punto G di questa si tiri la tangente GM , e si vedrà, che anche le parallele BH , IG , le BN , PG , anch'esse parallele fra loro, sono eguali, e che $BA = HG = ar. BH$. Ma quando il semicircolo CFE giunga in I l'arco MI risulta $= BI$; dunque $ar. MI = ar. BI$; e $ar. MI = cor. BH = IG$ e

$\hat{BIM} = \hat{IGH} = \hat{BGI}$; e per le parallele BI , IG ,

la AM dev' essere il prolungamento della IG . Tenuta la AM tangente della cicloide BMF , è certo ch'ella riesce perpendicolare ad AG , poichè $AM \parallel$ e parallela a PF , $MI \parallel$ e parallela a PC , $IMN = CPF = 90^\circ$. Dunque la cicloide BMF incontra ad angolo retto qualunque tangente Qd della cicloide BGD , n'è per conseguenza la sviluppante, e si verifica:

Teor. Che la sviluppante della cicloide è un'altra cicloide eguale alla sviluppata, ma posta in una situazione inversa.

§ 178. Quando il filo sviluppato giunge in F , la tangente DF , allora perpendicolare in D ad AD , risulta perpendicolare in C alla BC , e cade sull'asse CF della cicloide BMF ; ma DF è perim $BGD = \text{diam. } CF$: dunque il perimetro $BGD = CF = \text{diam. } CD$ e si ha:

Teor. Che il perimetro cicloidale eguaglia il quadruplo diametro del circolo generatore.

§ 179. Aumentando indefinitamente il numero de' lati componenti il poligono regolare di cui (177), il poligono degenera in circolo, ed il perimetro $AMNOPQM$ (F. 65) diventa quello della cicloide, avente per base la retta AM e per asse il diametro del prodotto circolo: dunque: l'area della cicloide è triplice del circolo generatore. Ci rincorre di dover tralasciare i argomenti cicloidali, argomento difficile che altrettanto sarà il proclaramento legge di Pascal.

Torniamo ora osservare, che quando (F. 6a) AD è circoncl DGE , e per qualunque punto P si ha la proporzione $AD : PE :: r : ar.GE$, la curva contenuta dai punti P , dicesi *Trocoide*; e che tal curva, qualora appoggiata strettamente all'origine, è quella in cui conformasi una corda tesa, la quale venga distrutta dalla sua naturale poi-

zione. Dobbiamo a Taylor la prima idea fondamentale di questo bel problema, da lui esposta nell'ingegnere Opere che ha per titolo *Methodus Incrementorum*: idea che fu messa portata in seguito ad un alto grado di crescente raffinamento da Geo. e Daniele Bernoulli, da Euler, D'Alembert e Lagrange.

§ 110. Per un punto C si tiri una linea verticale indefinita, indi un raggio vettore r_1 di nota grandezza, che faccia con l'asse un angolo arbitrario $\frac{1}{2}$, e biperpenda questo con una retta, si alzi all'estremo di r_1 la perpendicolare, che incontrerà la retta precedente, e determinerà un 2.^o raggio vettore r_2 : si bisecchi l'angolo $\frac{1}{2}$ fatto da r_2 con l'asse, e la perpendicolare all'estremo di r_2 incontrerà la retta che biseca $\frac{1}{2}$, e determinerà un 3.^o raggio r_3 ed nasce così la doppia serie

$$r_1, \frac{1}{2}r_1, \frac{1}{4}r_1, \frac{1}{8}r_1, \dots, r_{n+1}, \frac{1}{2}r_n,$$

ed un corrispondente numero di trigoni ortogonali, dai quali, cominciando dal 1.^o, rispettivamente si ritrae

$$\cos \frac{1}{2} : \cos r_1 : r_1 = \frac{r_1}{\cos \frac{1}{2}}; \cos \frac{1}{4} : \cos r_2 : r_2 = \frac{r_2}{\cos \frac{1}{4} \cos \frac{1}{2}};$$

$$\cos \frac{1}{8} : \cos r_3 : r_3 = \frac{r_3}{\cos \frac{1}{8} \cos \frac{1}{4} \cos \frac{1}{2}}; \text{ ec. in generale}$$

$$r_{n+1} = \frac{r_n}{\cos \frac{1}{2} \cos \frac{1}{4} \cos \frac{1}{8} \dots \cos \frac{1}{2^n}};$$

formola, che fatta $n = \infty$, esprime il raggio vettore verticale R : ma

$$\cos \frac{1}{2} \cos \frac{1}{4} \cos \frac{1}{8} \dots \cos \frac{1}{2^n} \cos \frac{1}{2} \text{ ec.}$$

e può $\cos \frac{1}{2} \cos \frac{1}{2} \dots \cos \frac{1}{2} \cos \frac{1}{2} : \sin \frac{1}{2}$:

d'altronde $\cos \frac{1}{2} \cos \frac{1}{2} \dots \cos \frac{1}{2} \cos \frac{1}{2} : \sin \frac{1}{2}$:

donque $R = \frac{r^b}{\sin b}$. Sottrae qualunque raggio vet-

tore r_n può assumersi pel primo r_1 , basta dire
l'angolo da esso fatto con l'asse, per avere
l'equazione $r = \frac{R \sin \frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}$ della curva costruita col

metodo esposto, curva di varia forma, cui,
per la ragione che resta addizionale, si dà il
nome di *Singhata*. Considerando come positivi
essendosi gli angoli alla sinistra dell'asse risul-
tano negativi quelli che trovansi alla destra del
medesimo, e perchè $\frac{\sin -\frac{1}{2}}{-\frac{1}{2}} = \frac{\sin \frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}$, il luogo due

rami eguali e simili dall'una e dall'altra parte
dell'asse, che gli tocca in C. L'angolo $\sin \frac{1}{2}$,
percorso la circonferenza diventa

$$\sin(xr+\frac{1}{2}), \sin(\frac{1}{2}xr+\frac{1}{2}), \sin(\frac{1}{2}xr+\frac{1}{2}), \text{cc.}$$

L'equazione $r = \frac{R \sin(\frac{1}{2}xr+\frac{1}{2})}{\frac{1}{2}xr+\frac{1}{2}}$ ossia $r = \frac{R \sin \frac{1}{2}}{xr+\frac{1}{2}}$

determina un'infinita serie di raggi vettori,
che stanno ai rispettivi r, r_1, r_2 cc. come
 $\frac{1}{2}xr+\frac{1}{2}$, ed insieme costituiscono due nuovi ra-
mi, interiori e stabilmente discesi dai primi
dalla sostituzione di $\frac{1}{2}xr+\frac{1}{2}$ deriva una 2.^a cup-
pia di rami anche più ristretta, e così all'in-
finito; quindi ha origine una serie di foglie sem-
pre più raccolte, aventi per limite il punto C.

§. 281. La *Cardoide* è una curva algebrica
di 4.^o ordine, simile alla *Singhata*, la cui tan-
cia diagonale con prolungare le corde condotte da

uno stesso punto della circonferenza di un circolo, finchè il prolungamento eguali il diametro.

§. 180. Una tangente BT all'estremo B di un diametro circolare BA si trasforma con moto uniforme, parallelamente a se stessa, avvolgendo col suo piede B nel prodotto diametro; intanto il raggio $CB (=r)$ avvolge egualmente intorno al centro, nella direzione della tangente, e sia la velocità dell'uno e quella dell'altro come $\frac{1}{2}\pi r$. La linea che comprende tutte le successive intersezioni della tangente col raggio è la Quadratrice di Diocastro.

Sia x l'ascissa contata CP , y l'ordinata MP , è l'arco circolare determinato dalla CM prolungata sino alla tangente, θ si avrà $r-x = \frac{1}{2}\pi r$, cioè

$$x = \frac{1}{2}\pi r - \theta = \frac{1}{2}\pi r - \frac{\pi x}{2r}$$

$$r-x = \frac{1}{2}\pi r - \frac{1}{2}\pi x, \text{ cioè } \sin\frac{1}{2}\pi\left(1-\frac{x}{r}\right).$$

E' alquanto $y = r \cos\theta = \tan\theta$; dunque

$$y = \frac{x}{r} \tan\frac{1}{2}\pi\left(1-\frac{x}{r}\right) \text{ cioè } y = \frac{x}{r} \cot\frac{1}{2}\pi \frac{x}{r} = \quad (*)$$

$$x\left(x - \frac{(\frac{1}{2}\pi x)^2}{2r^2} + \frac{(\frac{1}{2}\pi x)^4}{8r^4} - \dots\right) = \frac{(\frac{1}{2}\pi x)^2}{2r^2} - \frac{(\frac{1}{2}\pi x)^4}{8r^4} + \dots$$

$$\frac{\frac{1}{2}\pi x}{r} - \frac{(\frac{1}{2}\pi x)^3}{8r^3} + \frac{(\frac{1}{2}\pi x)^5}{128r^5} - \dots = \frac{\frac{1}{2}\pi}{r} - \frac{(\frac{1}{2}\pi)^3}{8r^3} + \dots$$

e fatto $x=r$ si ottiene la massima ordinata, ossia l'arco minore $\frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2}\pi$, risultando che la dipendenza l'adequato valore di $\frac{1}{2}\pi$, cioè la quadratura del circolo, dal solo elemento $\frac{1}{2}$ quindi il nome di quadratrice.

(*) Fatti si ponga r per x nella equazione di $\sin$, (180), e si abbia $\frac{\sin\pi}{\sin}$ per $\sin\frac{1}{2}\pi$

La predetta curva è comparsa di due rami uguali e simili, i quali si estendono indefinitamente al di sotto del diametro, e si concatenano generati dalle intersezioni del raggio radioposto, con la tangente che retrocede verso la sinistra di B e perpendice oltre A . Tali rami hanno per rispettive asintoto la tangente indefinita, trasportata parallelamente alla distanza r oltre A ed incassati a B . Infatti, se si trasporta l'origine in B , sostituendo $r-x$ per x si ha

$$y = \frac{r+x}{r} \tan \frac{1}{2} \frac{\pi}{r} x, \text{ e posta la } x \text{ negativa risulta}$$

$$y = -\frac{r+x}{r} \tan \frac{1}{2} \frac{\pi}{r} x, \text{ dove ad } y = \infty \text{ corrisponde}$$

$$\tan \frac{1}{2} \frac{\pi}{r} x = \infty; \tan \frac{1}{2} \frac{\pi}{r} x = 0; \text{ dunque } x = r.$$

§. 185. Se un punto B , situato all'estremo B di un diametro circolare BA , percorre con moto eguale la tangente in B , mentre lungo la tangente con eguale velocità si aggrava intorno al centro, vien descritta la Cichia. Il Calcolo Differenziale insegna a condurre la tangente in un dato punto ed a quadrarne la superficie: si trova che dopo la 1.^a rivoluzione una b , detratto il circolo, $= \frac{(2\pi)^2}{6r}$ dove 2π è la circonferenza; che dopo la 2.^a è

$$= \frac{(2\pi)^2}{r} \left(1 - 6 \frac{(2\pi)^2}{6r} \right); \text{ ed}$$

supponendo che il moto di proiezione del punto B proceda lungo una retta alzata in un punto della circonferenza, perpendicolarmente al piano del circolo, si ha la Cichia ascendente, curva il cui parametro è $= mc\sqrt{a}$ dopo la 1.^a rivoluzione circolare; $= mc\sqrt{a}$ dopo la 2.^a, e così via.

§. 184. Una curva analoga alla precedente è la Spirale di Archimede, e si concepisce generata da un punto C , che scorre con certa conformazione nel raggio CB mentre questo compie una rivoluzione, e così in seguito. Da ciò si deriva che l'arco circolare o percorso del punto C sia alla parte di CB , cioè al raggio vettore r , corrispondente al punto della spirale con C unito, come uno r , e però si ha l'equazione $sw = ar$, dove può sostituirsi $sw = a$, $pr = ar$ co. per a . La curva è dunque composta di infinite spir., parte pel centro C e per l'estremo del raggio CB , del doppio, del triplo ec. di CB .

Si vedrà nel Calcolo Differenziale che la retta tangente è $w = \frac{ar}{r}$, e che l'aja della $r.$ spir. è il terzo del circolo descritto col centro C ed il raggio CB .

§. 185. Sopra ogni raggio CM , di un circolo il cui diametro AB , si prenda una parte CN media geometrica fra l'arco AM ed una retta data: per tutti i punti così determinati si faccia passare una curva e si avrà la Spirale parabolica, la cui equazione è $sw = a^2$, dove a è la retta data, a l'arco AM , e il raggio vettore CM : ella passa dunque pel centro e si estende all'infinito.

§. 186. Col centro in C e con diversi raggi presi sopra un indefinita retta CH si descrivano altrettanti archi di eguale lunghezza, e la linea che unisce gli estremi di tutti gli archi, che si suppone esser molti ed assai vicini, costituisce la Spirale parabolica di Gio. Bernoulli. Sia r il raggio di un circolo qualunque su cui si è preso uno de' prodotti uniti, tutti eguali ad a , e congiunto C con l'estremo di un altro arco ado-

siore al precedente, dicasi a l'arco del circolo compreso tra la CH e la retta tirata da C all'estremo ascendente, e la retta stessa di cui si tratta, la quale non è altra che un raggio vettore della curva. È chiaro che si ha $dr = r d\alpha$, vale a dire invar, equazione analoga a quella dell'iperbola dei gli asintoti (254). Si osservi che la sostituzione di $dr = r d\alpha$, $dr = r d\alpha$ per la successivamente designazione il raggio r senza ridarlo mai a zero, e si vedrà che la spirale iperbolica si accosta con infinite spira, decrescenti verso il centro C senza giungervi mai.

Si osservi altresì, che i successivi archi tanto meno differiscono dalla linea retta, quanto è più grande il loro raggio, e si vedrà che l'arco allungato ad infinite distanza equivale ad una retta eguale all'arco a prova nel circolo regolatore, che in conseguenza, se alla distanza dell'arco CH si condurre una retta indefinita, parallela a detta arco, e posta alla distanza infinita dell'arco a rettificare, tal retta dev'essere un asintoto.

Si vedrà nel Calcolo Differenziale che la rettificata è costante ed $= a$.

§. 287. Una curva spirale che faccia con tutti i suoi raggi vettori la stessa angola è detta

Spirale logarithica, ed ha per equazione $Lam. \frac{a}{r \tan. \beta}$ dove r è raggio di un circolo regolatore, e l'arco di esso computato da un determinato punto fino a quello in cui è interseco dal raggio vettore r .

La trasformata $am. \frac{a}{r \tan. \beta}$ dimostra, che mentre le ascisse si crescono in progressione aritmetica, varia in progressione geometrica il raggio.

La scelta arbitraria di $ar=au$, $qr=va$ ed. per
a la vedere che la curva risulta all'infinito.

§. 188. All'estremo B (F' 66) di un dia-
metro circolare AB (ma), si concepisce una tan-
gente indefinita; per A un sufficiente n.° di se-
greti come AMN , che traversa la tangente in
 B ; partendo da B prendasi $BN=MA$, e la serie
de' punti N formerà la Cusce di Diocle. Sia
 $AQ=x$, $QN=y$, e discomponi i triangoli APN , BNQ ,
dove $BN=MQ$, sono quasi e perciò
 $AP (=NS) = MQ$, come pure $BP = AQ$, si avrà

$$AP(ar-x) = PM(\sqrt{arx-x^2}) : AQ(x) : NQ(y),$$

e quindi $y^2(ar-x) = x^2$, e così

$$y\{ma\sqrt{ar-x} = \sqrt{arx-x^2}\} = \frac{x\sqrt{arx-x^2}}{ar-x}.$$

Daque n.° la x , y manifestano insieme a per-
ciò la curva passa per l'origine A ; n.° Seccata
ad $x=ar$ corrisponde $y=0$, e siccome la cus-
va ha per asintoto la CBD ; 3.° La y divenen-
do immaginaria quando $x < 0$ e quando $x > ar$,
non esiste parte della curva nè al di sopra del
vertice A , nè al di sotto della CBD .

§. 189. Se un indefinito numero di raggi con-
dotti da un punto C (F' 67) si tagliano con
una retta EF , e poi si prende $DB=PM=ca$,
cioè, i punti B , M ca. appartengono alla Cusce
di Nicomede. Sia $DQ=ar$, $MQ=y$, $CD=b$ e si avrà

$$PQ(\sqrt{a^2-y^2}) : MQ(y) : DP(x-\sqrt{a^2-y^2}) : CD(b),$$

cui $y^2=a^2by^2+(a^2-b^2+x^2)y^2-ac^2by=a^2b^2$;

ma questa equazione è troppo complicata. Pre-
ndendo in vece AN (parallela ad EF) $=y$,
 $CN=x$, si ottiene

$$CM(\sqrt{x^2-y^2}) : CM(x) :: PM(x) : DM(x-b),$$

$$\text{d'onde} \quad (x-b)^2(x^2-y^2)=a^2x^2 \quad \text{e però} \\ y=\pm x\sqrt{a^2-(x-b)^2}:(x-b).$$

Questa s'inscrive a.° che la y diviene immaginaria quando $x=a+b$ perchè mostra $a^2 < (x-b)^2$, e che tale altro si ritrova allorchè si ha $x=b-a$. Infatti $x=b-a-b$ produce il rapporto $a^2 < (b-a-b-b)^2$ ossia $a^2 < (a-b)^2$, che dipende da quest'altro $a < a-b-b$, sempre vero qualunque valore reale dicesi a. b. Dunque la curva non oltrepassa il punto B al di sopra di EF, nè il punto A, quando C, $Amb=a$, al di sotto dell'asintotta EF. a.° Che $x=a$, $y=0$, spettano al punto C distante dalla curva e che dicesi confuato: b.° Che $x=b$ dà $y=\infty$ e perciò la EF, perpendicolare sulla metà di AB, è asintotta della curva: c.° Che atteso il doppio valore uguale, di segno contrario, competente ad y , esistono due rami uguali e simili da una parte, due altri uguali e simili fra loro, ma non si precedenti, trovandosi dall'altra dell'asintotta.

Sopprimiamo la generale teoria delle Curve, ed invitiamo i lettori a consultare una memoria di Le Nive negli Atti della R. Accademia di Parigi per l'anno 1705. Fanno' anche vedere i rapporti della Cassiniana con la teorica del rifratto figurato: (*Le Comptes Rend.* vol. 2. n. 1734.)

§. 190 L'equaz. $y^4+(ax^2-a^2)y^2+ax^2+a^2x^2=0$ rappresenta la Lemniscata di Giacomo Bernoulli. Rivolvendola (3a) si ha

$$y=\pm\sqrt{\frac{1}{2}(a^2-ax^2)}=\frac{1}{2}p\sqrt{(a^2-4ax^2)}$$

e però i valori di y sono quattro, come (P. 68) pm, pm', pm, pm' , eguali a due per due finchè

$m = m_0 \frac{d}{\sqrt{x}}$, dove $m = mv/c$; si riducono a due, h_f' , h_g' , uguali a $m_0^2 (v/c^2)$ quando $x = m_0^2 \frac{d^2}{\sqrt{x}}$; e due per sono, cioè cd , ce , espressi per $y = m_0^2 (c^2/a^2 m_0^2 a^2)$ allorché si fa $x = 0$. La curva gac di estrado a di b dell'ascissa $m_0^2 \frac{d^2}{\sqrt{x}}$ perché le y divergono immaginarie. Il punto C è un nodo.

CAPITOLO VIII.

Della Superficie curva.

§ 191. L'equazione di una superficie curva, siccome rappresenta tutti i punti dello spazio a cui ella corrisponde, dev'essere fra tre coordinate, e perché $Ax + By + Cz + D = 0$ esclusivamente appartiene ad un piano (§ 184) il grado della medesima è superiore al 1.^o Ciò peraltro non basta, e bisogna che, qualora si risolva per rapporto ad una coordinata, per esempio alla z , due, dunque certi limiti, uno o più valori reali. Come l'ipotesi $x = 0$ dava (§ 181.) la traccia del piano in quella della x, y , così, trattandosi di una superficie curva, l'ipotesi procedente si riferisce all'intersezione di essa e del piano xy , e perciò l'equazione risultante dopo l'eliminazione di z , rappresenta la curva comune ad ambedue le superficie: supponendo anzi si hanno le sezioni fatte con un piano parallelo ad xy , e da esso distante di una minima rettilinea mc .

§ 192. Quando nell'equazione di una superficie, che supponiamo di 2.^o ordine, e perciò

espressa con un'equazione di n° grado in x, y, z , raddoppi la prima potenza della z , si hanno per z due valori uguali e di segno contrario; perciò il piano xy bipartisce la superficie ed è diametrico. Dicasi lo stesso per rapporto ad x o ad y , e si concluderà che i piani coordinati sono tutti diametrici quando l'equazione sia della forma $Ax^2 + By^2 + Cz^2 = Q$.

I predetti piani dicono *primari* se s'intrecciano ad angolo retto; si distinguono col nome di *coppie* quando, sotto qualunque angolo s'incontrano, non hanno la corda parallela all'altra.

Un punto talmente situato, che tutta la corda per esso condotta si restino bipartita, è il centro della superficie, e si vede che si corrisponde l'intersezione de' piani diametrici primari.

Tra le superficie di n° ordine alcune hanno centro, altre ne sono prive: converrebbe discutere la loro equazione generale

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dxz + Eyz + Fz^2 + Gx + Hy + Iz + L = 0 \quad (1)$$

con un metodo analogo a quello del §. 120, per riconoscere le condizioni da cui l'esistenza del centro dipende, ma tale indagine oltrepassa la sfera di un elemento, ed attesa anche l'angustia del tempo e nel concorso, siamo costretti a restringere l'esposizione del presente argomento, limitandoci ad un saggio sulle superficie, sferica, conica e cilindrica, conoidale di alcune nozioni sul cono-cuneo, sull'ellipsoide e sulla intersezione di due superficie curve.

§. 195. Chiamando α, β, γ le coordinate del centro di una superficie sferica riferita a tre piani ortogonali, ed x, y, z quelle di un suo punto, facilmente si ravvisa essere

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + (z-\gamma)^2 = r^2, \dots (2)$$

e che, posta l'origine nel centro si ha

$$x^2+xy^2+yz^2+zx^2=r^2, \dots (3)$$

Tale infatti è il simbolo esprimente i punti dello spazio, posti alla distanza r dall'origine (108). Resta combinare la precedente con (2), per avere dalla $y^2+zx^2=r^2-h^2$, la proiezione nel piano xy della sezione elicica, fatta con un piano parallelo ad xy , e da esso distante di una misura lineare h ; proiezione, che attesa il parallelismo del piano tangente, non differisce dalla sezione stessa, ed è un circolo avente il centro nell'origine, di raggio $=\sqrt{r^2-h^2}$. Il piano diventa tangente quando $h=r$, e siccome la proiezione si riduce ad $y^2+zx^2=0$, ossia [punto, zero] simbolo dell'origine, il raggio si annulla e si perpendicolare al piano tangente.

Combinando con l'equazione (5) quella di un piano $ax+by+cz=d$, e ciò mediante la eliminazione di una coordinata, per esempio della z , si ottiene l'equazione ellittica.

$$(b^2+c^2)y^2+(a^2+c^2)x^2+2abxy+2acdx+2bcby=r^2-d^2;$$

ma si sa della Geometria che qualunque sezione elicica è circolare: dunque la proiezione di un circolo su di un piano ad esso inclinato è un'ellisse.

La successiva sostituzione di x per x' , y per y' , z nella formula (1) di subita ciascuna delle sezioni fatte dai piani coordinati, ed il risultamento dimostra che in generale può esse essere una qualunque curva di 2.^o grado.

Le sezioni provenienti da piani che si succedano con una determinata legge, opportunamente scelta per riconoscere l'andamento ed i limiti della proposta superficie.

§ 194. Essendo (x_1, y_1, z_1) un punto dato in una data superficie sferica, si può determinare l'equazione di un piano che si passi toccandola. A tal effetto sia $p(x-x_1)+q(y-y_1)+z-z_1=0$ il piano di cui si tratta, e siccome il raggio tirato al contatto, raggio le cui equazioni sono (163)

$$x=\frac{x_1-r}{1-r}, \quad y=\frac{y_1-r}{1-r},$$

dev' essergli perpendicolare, d' uopo è (176) che si abbia

$$p=\frac{x_1-r}{1-r}, \quad q=\frac{y_1-r}{1-r};$$

e tal condizione avendo caratteristica esclusiva del piano tangente (§ 190.), ne segue che l'equazione richiesta, fatta la sostituzione di r^2 per

$$x_1^2+y_1^2+z_1^2, \text{ dà}$$

$(x-x_1)x+(y-y_1)y+(z-z_1)z-xx_1-yy_1-yy_1-z_1z_1+x^2+y^2+z^2=0$,
e perchè l'origine può supporre nel centro, si ha più semplicemente $xx_1+yy_1+zz_1-r^2=0$.

§ 195. Calcolando l'arbeloide, cioè il volume generato dall'arbelo (168) mediante la rivoluzione del semicircolo ADB (F' qB) intorno al diametro AB , posto $AD=x$, si trova

$$\text{Arbeloide} = \frac{1}{2}\pi[r^3-x^3-(r-x)^3] = \pi(r-x)x;$$

risultamento che somministra uno spiccoo istrutto, ed è:

TEOR. Che l'arbeloide eguale al cilindro inscritto nel circolo che ha per diametro l'ordovata DB , e la cui altezza è il doppio diametro della sfera, cioè $2AB$. (*)

(*) Integ. $dx = \frac{1}{2}\pi[r^3-x^3-(r-x)^3] = \pi(r-x)x$, +
ed. si cui dim. $2\pi r^2 r - \pi x^2$.

§ 191. Un cilindro retto equivale ad un sistema di rette, alzate sui punti del perimetro della base, perpendicolarmente al di lei piano; basta dunque l'equazione della base (che d'altronde non differisce da qualunque sistema parallela) per stabilirne la posizione e le forme.

Il sistema dell'equazione (4) (§ 190) è di quella di un piano condotta pel centro (α, β, γ) cioè $p(x-\gamma)+q(y-\beta)+z-\alpha=0$, dove p, q determinano l'inclinazione del piano in i piani coordinati, rappresentando nello spazio il circolo avente il raggio mr , e ad esso ottengono col solito metodo le proprietà.

Per la ricerca dell'equazione cilindrica giustando anzi che la base sia opportunamente collocata, procediamo dalla considerazione di un circolo comunque situato nello spazio, e lo supponiamo nel piano yz , col centro nell'origine, onde avere per esprimerlo, il semplice sistema

$$\{z=0, y^2+z^2=r^2\} \dots (4)$$

Ciò posto sia $\{y \cos \alpha + z, \sin \alpha + \beta\} \dots (5)$ la generatrice di un cilindro, che per conseguenza si esecrerà trasportata con moto parallelo in giro, che mai non si discosti dal perimetro della base. È chiaro che per una determinata generatrice le α, β , hanno un certo valore corrispondente alla primitiva situazione della generatrice stessa, ed ella legge che governa il movimento; ma che debbono variare insieme de una generatrice all'altra, il che significa essere α, β insieme variabili come la coordinate di una curva, vale a dire che si ha $\beta=f(\alpha)$, funzione che si determina eliminando x, y, z , fra l'equazione (4), (5), d'onde si trova

$$r^2 - \beta^2 = r^2, \text{ cioè } \beta = \sqrt{r^2 - \alpha^2}.$$

Così d'altra più non si tratta che di eliminare α tra le due

$$y = ax + a \text{ e } \cos \theta x + \sqrt{(x^2 - a^2)};$$

per la che si deduce dalla 1.^a $a^2 = (y - ax)^2$, e la 2.^a, ossia $(y - ax)^2 = x^2 - a^2$ si cambia nell'equazione richiesta $(y - ax)^2 + (x - bx)^2 = ar^2$, equazione che si riduce ad $y^2 - a^2 = ar^2$, simbolo della base, quando il cilindro è sotto, perchè la generatrice, dovendo essere perpendicolare al piano yz , si trova costantemente in una posizione parallela ad Ax , tal'è pur quella delle sue proiezioni, e da ciò proviene l'annullamento delle tangenti a , è (167). (*) L'esperienza farà vedere che per procurarsi tutta la possibile latitudine, s'avrebbe giova rappresentare il cilindro sotto di base circolare, con la più generale equazione della sua base $(y + c)^2 + (x + d)^2 = ar^2 \dots (6)$, dove sono anche supposte negative le coordinate centrali c, d . § 499. Il sistema (4) combinato con la generatrice $[y - y_1 \cos \theta, (x - x_1), z - z_1 \cos \theta, (x - x_1)]$

obbligata di passare per un dato punto (x_1, y_1, z_1) , previa la sola sostituzione di f, a , per h, r si compie in quest'altro

$$y^2 - a^2 = x^2, \quad y = y_1 - a, \quad z = z_1 - f a, \quad x_1$$

La x_1 in forma dell'altre due, diventa

$$(y_1 - a, x_1)^2 + (z_1 - f a, x_1)^2 = ar^2$$

$$\text{d'onde } f a, x_1 = \frac{1}{x_1} \{ z_1 - \sqrt{r^2 - (y_1 - a, x_1)^2} \};$$

però l'equazione che dobbiamo dare, eliminata a , quella che si desidera, sono

$$y - x_1 \cos \theta, (x - x_1), \quad z - z_1 = \frac{r - x_1}{x_1} \{ y_1 - \sqrt{r^2 - (y_1 - a, x_1)^2} \},$$

$$\text{e la 2.^a, perchè } \cos \theta = \frac{y_1 - x_1}{x_1 - x_2} \quad \text{di}$$

(*) a, θ sono le angoli del punto in cui la retta incontra l'asse z , e le tang. degli angoli di che con le asse si può fare la eq. del xy .

$$y_1 - a_1 \mu \left[1 - \gamma_1 \sqrt{\frac{r^2 - a_1^2 \mu^2}{x - x_1}} \right] = \frac{a_1 x_1 - a_1^2 \mu^2}{x - x_1},$$

si trasforma in

$$x_1(x - a_1) = a_1(x - x_1) - (x - x_1) \sqrt{r^2 - \left(\frac{a_1 x_1 - a_1^2 \mu^2}{x - x_1} \right)^2},$$

la quale, fatta la trasposizione del 1.^o termine del 2.^o membro, indi la riduzione ed il quadrato, dà invece

$$(x, x - x_1)^2 \left\{ - (x - x_1)^2 \left[r^2 - \left(\frac{a_1 x_1 - a_1^2 \mu^2}{x - x_1} \right)^2 \right] \right\} = a^2 (x - x_1)^2 - (x_1 y_1 - a_1 \mu)^2$$

ovale $(x_1 y_1 - a_1 \mu)^2 + (x_1 y_1 - a_1 \mu)^2 = a^2 (x - x_1)^2 \dots (7)$

Per un caso particolare è $y_1 = 0$, $x_1 = 0$, e l'equazione della nostra superficie riducesi ad

$$x^2 + y^2 = \frac{r^2}{a_1^2} (x - x_1)^2,$$

dove $\frac{r}{a_1}$ indica, ang. della generatrice sull'asse x_1 .

Detta h l'asse si ha dunque $h^2(x^2 + y^2) = a^2(x - x_1)^2$.

Per avere un'equazione anche più semplice si supponga il vertice nell'origine O (Fig. 69) ed

avendo hON di vertice $hN(x) \cdot hN(\sqrt{x^2 + y^2}) = h^2$ cioè $r^2 x^2 = h^2(x^2 + y^2) \dots (8)$

Eliminando x mediante l'equazione

$$ax + by + d \quad \text{si ottiene}$$

$$(x^2 + y^2 - h^2) y^2 + a^2 a b x y + (r^2 a^2 - h^2) x^2 +$$

$$a r^2 d (ax + by + d) = 0,$$

e questa si riferisce alla ellisse, alla parabola, all'ipercbola, secondo che da

$$4ac^2, ac, -ar\sqrt{a^2 + b^2}:$$

la ragione non diventa circolare che quando il

Seo

piano seguito è parallelo ad xy , il che supponiamo vero, detto $a = d$; allora risulta identico il coefficiente di y^2 e di x^2 , e rimane quella di xy a valore di ciò che si vide (175). Anche l'equazione (7) camberebbe ad un risultato analogo.

§. 238. Una retta $y = ax + a$, $z = bx + \beta$, tale che per una ad A non passi un piano, mentre circolarmente intorno ad A . Si trova il raggio varia con la distanza dal piano xy , se si suppone $z = \beta$, in un punto qualunque (x, y, β) della generatrice, si ha per esprimere il circolo descritto dal predetto punto, il sistema

$$z = \beta, \quad x^2 + y^2 = f\beta;$$

Tra questo e quello della generatrice si eliminerà x, y e z , ed avendo ottenuto

$$f\beta = (a^2 + a)z^2 + (b^2 + \beta)z^2,$$

si vedrà che per deviare ad un'equazione esprimente il sito di tutti i punti della generatrice, considerate in tutte le posizioni possibili, cioè l'equazione del cilindroide, non resta che sostituire $x^2 + y^2$ per $f\beta$ e z per β , il che dà

$$x^2 + y^2 = (x^2 + b^2)x^2 + a(xa + b\beta)z + a^2z^2 + \beta^2.$$

Se eliminata il 2.^o termine del 2.^o membro onde avere un'altra sotto la forma più semplice

$$x^2 + y^2 = \frac{c^2}{a^2}(d^2 + z^2).$$

Così facilmente si dimostra che il cilindroide coincide col volume generato dal perimetro di un'ipercubo, che si aggira, sempre alla distanza del 1.^o vertice, intorno al 2.^o. Basta scegliere per il centro con la tangente della y , ed co-

servare che questa retta è la z risultante secondaria dell'ipertubo generatrice. (*)

§. 109. Abbiamo un semicircolo ABC (Fig. 90) perpendicolare ad un rettangolo AB : da un punto p del diametro si conducono le pm , pn , perpendicolari ad ABC ne' rispettivi piani, e le rette bp ordinano la superficie curva, detta il Cava-cavo di BP alla, rispetto la cui equazione

$$(ax-x^2)(b-z)^2=b^2y^2,$$

dove x , y , z sono le coordinate Ax , py , az di un punto q della ac , si ritrae dalla proporzione, il cui simbolo è

$$ap(\sqrt{ax-x^2}):pr(-b)::an(\sqrt{ax-x^2}-y):aq(z)$$

Quando la bp fa un angolo θ con Ax il cava-cavo diventa acuminato, e chiamando d la distanza tra il punto B e quello in cui la bp segna Ax , si trova l'equazione

$$(d+b)^2y^2\sin^2\theta-(ax-x^2)\{(d+x)\tan\theta-z\}^2.$$

Per concepire la più ampia e completa maniera del cava-cavo fa d'uopo costruire alla retta ab ed alla semicirconferenza ABC due curve qualunque, i cui rispettivi piani sieno tra loro perpendicolari. In tale ipotesi, disegnando per la ap ed f la cp , applicata di un punto p della ac curva riferita agli assi Ax , Az , si ha dalla solita proporzione

$$ap.x=fx(\phi x-y).$$

§. 110. L'intersezione di due superficie di n° ordine è sempre dotata di doppia curvatura, qual'è quella di una curva piana che si adatta sulla cur-

(*) Il P. Cavalieri ha il merito di compiere la superficie di cui si tratta e la dare il nome di *superficie ipertubo*, come a cp e il sottoposto quello di *chavato*, come più semplice è la loro più espressioni.

vertici di un cilindro, e si supponga con due proiezioni, che mediante le successive eliminazioni di due coordinate, traggono dall'equazioni delle superficie proposte. Ecco un metodo per riconoscere quando l'intersezione è affetta di semplice curvatura, e fatta per conseguenza esiste in un punto.

Pongasi $z = (ax + by + d)/c$, nell'equazione di una superficie, e se la risultante può ridursi all'identità con quella, che nasce dalla eliminazione della z fra l'equazioni delle due superficie, l'intersezione sarà una curva piana: nel caso contrario non sarà tale.

Le superficie intersega essendo per esempio sferiche, e rispettivamente espresse per $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $(x + \alpha)^2 + (y + \beta)^2 + (z + \gamma)^2 = r^2$, si trova

$$\frac{1}{2}(a^2 + r^2)x^2 + \frac{1}{2}(\beta^2 + r^2)y^2 + 2\alpha\beta xy - \frac{1}{2}\lambda^2(ax - \beta y) + \lambda^2 - \frac{1}{2}r^2r^2 = 0$$

dove $\lambda^2 = a^2 - r^2 - \alpha^2 - \beta^2 - \gamma^2$. Ma sostituendo $\frac{1}{c}(ax + by + d)$ per z in $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ si ottiene

$$(x^2 + \alpha^2)x^2 + (\beta^2 + \alpha^2)y^2 + 2\alpha\beta xy + 2\alpha dx + 2\beta dy + d^2 - c^2r^2 = 0,$$

e questa si rende identica alla prec. con fare

$$\alpha = \alpha, \beta = \beta, c = cr, d = d.$$

Quunque l'intersezione di due superficie sferiche è una linea dotata di semplice curvatura, ed esiste nel piano

$$ax + by + cz = \frac{1}{2}\lambda^2.$$

Facendo le stesse operazioni nell'equazioni (6), (8) si scorge impossibile la richiesta identità, e perciò si conclude essere doppiamente curva la linea d'intersezione tra l'cono ed il cilindro, l'uno o l'altro dei cui, per comodo, supposti retti e di base circolare.

FINE.

AVVISO DELL'EDITORE.

Per provvedere al comodo ed al profitto degli studiosi di matematica qui lo portilo per incassamento comodo, agli schiarimenti che l'Autore ha immaginati durante la spiegazione delle prime 106. pagine.

Pag. 14 - Lin. 14. Infatti se $m > n$ ed $m = n + p$

$$\text{si ha } \frac{a^m}{a^n} = \frac{a^{n+p}}{a^n} = \frac{a^n}{a^n} a^p = a^p = a^{m-n},$$

dove $m-n$ è il valore di p dato dall'eq. $m=n+p$.

Pag. 16 - 17: quindi non il minimo deviare da $S = q_1 r + r_1$ ed $A = q_1 R + r$ nel 1.° caso; non di $r = q_1 r_1 + r_2$, $S = n_2$ o. c. nel 2.°

Pag. 48 - 4 Si ha pure

$$\begin{aligned} \left(\sqrt[n]{a}\right)^m &= \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m = a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} \left(a^{\frac{m}{n}}\right); \text{ ma} \\ \sqrt[n]{a^m} &= \sqrt[n]{a^n a^n \dots a^n} = \sqrt[n]{a^n} \sqrt[n]{a^n} \dots \sqrt[n]{a^n} = \left(\sqrt[n]{a^n} \sqrt[n]{a^n} \sqrt[n]{a^n} \dots\right) = \\ a^{\frac{n}{n}} a^{\frac{n}{n}} a^{\frac{n}{n}} a^{\frac{n}{n}} a^{\frac{n}{n}} &= a^{\frac{n}{n}} a^{\frac{n}{n}} a^{\frac{n}{n}} a^{\frac{n}{n}} a^{\frac{n}{n}} = a^1 : \text{ dunque} \\ \sqrt[n]{a^m} &\text{ ossia } a^{\frac{n}{n}} a^{\frac{n}{n}} a^{\frac{n}{n}} a^{\frac{n}{n}} a^{\frac{n}{n}} = a^{\frac{n}{n}} + \frac{n}{n} + \frac{n}{n} + \frac{n}{n} + \frac{n}{n}, \text{ e} \\ \sqrt[n]{a^m} a^n &= a^{\frac{n}{n}} a^{\frac{n}{n}} a^{\frac{n}{n}} a^{\frac{n}{n}} a^{\frac{n}{n}} = a^{\frac{n}{n} + \frac{n}{n} + \frac{n}{n} + \frac{n}{n} + \frac{n}{n}}. \end{aligned}$$

Pag. 48 - 13

$$\begin{aligned} a^{\frac{n}{n}} a^{\frac{n}{n}} \dots a^{\frac{n}{n}} (\text{vol.}) &= \sqrt[n]{a^n} \sqrt[n]{a^n} \sqrt[n]{a^n} \dots \sqrt[n]{a^n} (\text{vol.}) = \sqrt[n]{a^n} a^{\frac{n}{n}} \text{ ed} \\ a^{\frac{n}{n}} a^{\frac{n}{n}} &= \sqrt[n]{a^n} \sqrt[n]{a^n} a^{\frac{n}{n} - \frac{n}{n}} = \sqrt[n]{a^n} a^{\frac{n}{n} - \frac{n}{n}} = a^{\frac{n}{n} + \frac{n}{n} - \frac{n}{n}} = a^{\frac{n}{n}} \text{ ossia } a^1. \end{aligned}$$

Pag. 49 - 4. Infatti se $\alpha = \beta$ si ha $P^{\frac{1}{\alpha}} = P^{\frac{1}{\beta}}$, e, posto $P^{\frac{1}{\alpha}} = K^{\frac{1}{\beta}}$, con fine la potenza β si ottiene

$$\begin{aligned}
 P^{\frac{1}{\alpha}} P^{\frac{1}{\alpha}} \dots (\beta \text{ vol.}) &= \sqrt[\beta]{P^{\frac{1}{\alpha}} P^{\frac{1}{\alpha}} \dots (\beta \text{ vol.})} \\
 &= \sqrt[\beta]{P^{\frac{\beta}{\alpha}}} = P^{\frac{\beta}{\alpha} \cdot \frac{1}{\beta}} = P^{\frac{1}{\alpha}} = K, \text{ e però} \\
 P^{\frac{1}{\alpha}} &= \sqrt[\beta]{P^{\frac{1}{\alpha}} P^{\frac{1}{\alpha}} \dots (\beta \text{ vol.})} = P^{\frac{1}{\alpha} \cdot \frac{1}{\beta}}.
 \end{aligned}$$

Pag. 55 - 20. Nota. Infatti $\frac{a}{b+c} = \frac{a}{b} + \frac{a}{c}$ se $a=0$, è vero; e dalla nota eq. divis.^a X quoz.^a = divid.^a X si apprende che il quoziente non può subire un'infinita diminuzione, senza che ne derivi un'eguale aumento del quoziente.

Pag. 84 - 1. Nota. A rigore $\frac{1}{a^m}$ è un infinitesimo dell'ordine stesso a cui appartiene l'infinito a^m ; alla proporzione incerta $\frac{1}{a^m} : \frac{1}{a} :: 1 : a^m$ due sostituir $\frac{1}{a^m} : \frac{1}{a} :: 1 : a^{m-1}$, e questa ha un significato molto più ampio di quella che bisogna, per concludere che $\frac{1}{a^m}$ equivalga ad una quantità evanescente: ciò peraltro, in vece d'indubitabile, rafforza la conclusione, e rimane intatto «adeguatamente provato», che anche quando a

sia un polinomio $n^{\circ} > r$, $mt + d$, + $\left(\frac{t}{r+1}\right)^{m+1}$,
in confronto di qualsivoglia quantità finita, sem-
pre uno.

Fig. 54 = 50. Nota. Si procede dall'ipot.
che si conosce il termine generale r , perchè in
tal caso l'incisione di un termine si ottiene sot-
traendo $\frac{1}{m}$, $\frac{2}{m}$, ec. per n la r . Sia la serie
algebraica di 5.^a ordine

$$0, 15, 40, 80, 150, 270, \text{ ec.}$$

per cui $r = \frac{1}{2}(15n - 5n^2 + 5n^3)$, e si vogliono in-
ciderne due modj.

La semplice sostituzione di $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{2}$, r , $\frac{5}{2}$ ec. per

$$n \text{ dà } 0, \frac{15}{2}, \frac{85}{2}, 16, \frac{178}{2}, \text{ ec.}$$

e questa nuova serie, siccome dedotta dalla stes-
sa formula, ha necessariamente la differenza ter-
za costante, e può soggiacere alla legge che ca-
ratterizza la proposta. Infatti si trova

$$\frac{59}{2}, \frac{44}{2}, \frac{50}{2}, \frac{68}{2} \dots \text{ differenza } r^{\circ}$$

$$\frac{5}{2}, \frac{9}{2}, \frac{11}{2} \dots \text{ differenza } 1^{\circ}$$

$$\frac{3}{2}, \frac{3}{2} \dots \text{ differenza } 5^{\circ}$$

Fig. 55 = 15. Sia per esempio $m=5$, e di-
videndo

$$x^5 + p_1 x^4 + p_2 x^3 + p_3 x^2 + p_4 x + p_5 (=X) \text{ per } x - a_1, \text{ si avrà}$$

$$a^5 + (p_1 + p_2)x + a^4 + p_2 a_1 + p_3 x + p^2 + a_1^2 + p_3 a_1^2 + p_4 x + p_5 \left(= \frac{R}{x - a_1} \right)$$

Dunque K coincide con la proposta, e se si fa sia $x=a_1$, ma tal sostituzione per ipotesi è valida, cioè riduce a zero la somma dei suoi termini; e del tutto conforme è il risultamento a cui si giunge operando su qualsivoglia equazione de' gradi superiori, giacchè per l'equazione generale X si ottiene

$$Sum_{i=1}^n +ip_1a_1^{n-1} - ip_2a_1^{n-2} \dots +ip_{n-1}a_1 + ip_n = 0;$$

dunque *ex.*

Pag. 106. - 3. Nota. Per ignoranza di segni tutti positivi tutti i segni, ma ciò non pregiudica, perchè la maniera con cui ciascun coefficiente è composto delle risolventi non dipende dal segno delle medesime, e d'altronde non avvi ragione di assumerle positive piuttosto che negative.

Pag. 106 - 6. Nota. Tutte le rette FL sono bisecate in E dalla perpendicolare ad AN in A_1 ; l'angolo delle perpendicolari in E son le rispettive parallele per L ad AN , costituite ai rispettivi punti della parabola, e perchè essi viali, convenientemente ne addestrano il perimetro.

AVVERTIMENTO DELL' EDITORE

GLI STAMPATORI ITALIANI.

*Q*uesto libro è proprietà dell' Autore, e se alcuno se arrogasse il diritto di riprodurlo, egli renderebbe falsa la speculazione di lui, rifacendolo il libro senza concedere di variazioni e giunte, ed un primo misero.

ERRORI.

CORREZIONI.

Pag. 147 = 5. 647 . . .	637
12 = 8. . . $\frac{1}{2}m(m-1)\frac{1}{2}m$	$\frac{1}{2}m(m-1)\frac{1}{2}(m-2)$
52 = 6 di $\log a_1 \dots a_n$	a_1^2
50 = 24 $a^m \sqrt{b^2c+a^2bc^2d}$	$a^m \sqrt{b^2c+a^2bc^2d}$
54 = 4 de <i>due Note</i>	
$\sqrt{100001}$	$\sqrt{10001}$
65 = 8 di <i>lea</i> .	
$\sqrt{Aa^2+Bb^2+Cc^2+Dd^2}$	$\sqrt{Aa^2+Bb^2+Cc^2+Dd^2}$
$+4Bb^2+8C$	$+4Bb^2+8C$
63 = 1 . . . +803588	+803588
82 = 3. al . . . $a+\frac{1}{2}$	$a-\frac{1}{2}$
88 = 16 . . . $\log \frac{a}{b}$	$\log \frac{b}{a}$
84 = 12 . . . $m \log \frac{a}{b}$	$-m \log \frac{a}{b}$
107 = 16 . . . $(A+B\sqrt{-1})$. . .	$(a-A+B\sqrt{-1})$
108 = 11 . . . a^m <i>avendo</i>	<i>sen avendo</i>
109 = 3. al . . . p_{2n}	p_{2n}
112 = 12 = $p^m (p^{m-1} \dots - p^2$. . .	$p^m \sqrt{p^{m-1} \dots - p^2}$
128 = 4 . . . $(p-q)$	$(p-a)$
11 . . . $2m-1$	$2m-1$
173. Le note, eccettuate le due prime linee, devono collocare in seguito di quella della pag. 175.	
175 = 4 = $2m \frac{1}{2} \sqrt{A}$	$2m \frac{1}{2} \sqrt{A}$
9 . . . $\frac{1}{2} \sqrt{A}$	$\frac{1}{2} \sqrt{A}$
126 = 17 . . . $(F: 38)$	$(F: 41)$
140 = 4 di <i>lea</i> . . . $(F: 40)$	$(F: 43)$

I N D I C E

DE' CAPITOLI, DELLA ARTICOLO E DE' ALFABETI
INDICANDO TUTTI.

——————

Lib. I. Introduzione. Definizione ed origine dell'algebra	Pag. 5
Cap. I. Calcolo letterale e prime nozioni dell'analisi finita	6
Cap. II. Riduzione de' termini alla loro più semplice espressione, e metodo per trovare con facilità e prontezza la somma di più potenze, di numeri che lettere	15
Cap. III. Combinazioni e permutazioni	29
Cap. IV. Delle Potenze	39
Soluzioni dell'equazioni del n. ^o grado	57
Cap. V. Estrazione delle radici quadrate e cubiche	59
Cap. VI. Teoria e calcolo delle quantità irrazionali	67
Forme del binomio con l'esponente frazionario	82
Delle quantità immaginarie	84
Cap. VII. De' Logaritmi	95
Cap. VIII. Proporzioni e Progressioni	105
Degli istanti, e degli infinitesimi	112
Falso problema	115
Cap. IX. Delle Serie	117
Regole della Serie	121

	Indice
<i>Serie algebriche</i>	= 98
<i>Serie simpatiane e ricorrenti</i>	= 98
<i>Cap. X. Delle funzioni continue</i>	= 98
<i>Sviluppamenti di una funzione continua in serie, e di una serie in funzione continua</i>	= 98
<i>Lib. II. Delle analisi finite</i>	= 103
<i>Cap. I. Teoria generale dell'equaz. algeb.</i>	= 103
<i>Cap. II. Trasformazioni a cui un'equazione può sottoporsi, ed uso di tali trasformaz.</i>	= 111
<i>Cap. III. Eliminazione delle incognite</i>	= 113
<i>Cap. IV. Discussione teorico-pratica dell'equazioni del 2.^o grado</i>	= 115
<i>Cap. V. Dell'equazioni del 3.^o grado</i>	= 119
<i>Cap. VI. Dell'equazioni del 4.^o grado</i>	= 123
<i>Cap. VII. Ricerca delle radici razionali dell'equazioni numeriche</i>	= 124
<i>Cap. VIII. Soluzione in numeri interi di problemi, di problemi che dipendono da un'equazione di 2.^o grado fra due o tre incognite</i>	= 125
<i>Lib. III. Cap. I. Detti. I. Teoria delle funzioni angolari</i>	= 127
<i>Trasformazione di un angolo e risoluzione trigonometrica d'ogni equazione cubica nel caso irriducibile</i>	= 128
<i>Det. II. Risoluzione de' triangoli rettangoli e ne applicazioni teorico-pratiche</i>	= 135
<i>Conversioni reciproche, seguite da due appendici</i>	= 139
<i>Cap. II. Applicazione dell'analisi finita alla Geometria elementare</i>	= 137
<i>Cap. III. Geometria di Struccion</i>	
<i>Det. I. De' punti e delle rette in un piano</i>	= 141
<i>Det. II. De' punti e delle rette nello spazio</i>	= 143
<i>Det. III. Del piano nello spazio</i>	= 147
<i>Cap. IV. Teoria de' poligoni rettilinei</i>	= 153
<i>Det. I. Notioni e formule fondamentali</i>	= 154
<i>Det. II. De' poligoni in generale</i>	= 158
<i>Det. III. De' poligoni circoscrivibili e degli inscrivibili al circolo</i>	= 161

<i>Art. IV. De' poligoni simili e de' paralleli</i>	184
<i>Art. V. De' poligoni regolari e degli spirali</i>	187
<i>Cap. V. Delle linee di n.^o ordine. Notione</i> preliminare	191
<i>Art. I. Del circolo</i>	192
<i>Art. II. Della ellipse</i>	193
<i>Art. III. Dell' iperbole</i>	195
<i>Art. IV. Della parabola</i>	197
<i>Art. V. Costruzione dell' equazioni del gra-</i> <i>do 1.^o e del 2.^o</i>	198
<i>Cap. VI. Delle curve trascendenti e di alcu-</i> <i>ne di un grado superiore al 2.^o</i>	199
Logaritmica	201
Cicloide, sua sviluppo, traslazione e geometria: Trascende	202
<u>Spirale e Cardoide</u>	203
Quadratrice	204
<u>Ciclole piano ed osculatore</u>	205
Spirali	207
Cicloide, Concoide e Lemniscata	208
<i>Cap. VII. Introduzione alle superficie curve</i>	209
Equazione del piano tangente della sfera	210
Sezione dell' iperboloido ad un cilindro	211
Equazione del cilindro retto	212
Equazione del cono retto	213
Del cilindroide	214
Del Cono-curvo	215
Intersezione delle superficie curve	216



Schiarimenti per alcune pagine posteriori alla 146.

P. 112 — Nota. Moltiplicati i successivi termini della proposta per 1, A , A' , A' , si fa $x=y=\sqrt{B}$ e nella trasformata scrivasi E per $\sqrt{B}$.

P. 122-19 ... tenersi a derivare: dove il 2.^o rapporto equivale a

$$3a^2 + 2a\sqrt{3\beta} + \beta > 0, \text{ cioè } (a\sqrt{3} + \sqrt{\beta})^2 > 0.$$

P. 139-2 ... se pari.....
se pari; vicev. se $r < 0$.

P. 150-19 ... $\tan a = \frac{r}{\cos a}$

$$\tan a \left[-r; \frac{\cos a}{\cos a} = r; \frac{\cos a}{1} \right] = \frac{r}{\cos a}.$$

P. 210-3... Basta eliminare dalla form. (10) a e b spettanti ad E , ora ignota.

P. 255 — penult. dopo $< \delta$

Preso sulla CD una retta $Cd = \sqrt{p}$,
la parallela per d ad AB sega il perimetro nel richiesto punto G .

- P. 253—14. In fatti si ha per costruzione
 $MI=MF$; inoltre $TI=TF$: dunque
 la TM è perpendicolare ad IF , la
 bisettrice σ (235) tocca la curva in M .
 P. 255—ult. per ottenere, mediante la sostituzi-
 one di $-a'b'$ in vece di

$$a'y, ' = b'x, ' \quad (248)$$

SUPPLEMENTO

Al Errore degli Elementi d'Algebra.

— 2 —

Pag. 37-114 . . .	Op. cit. . . .	Soluz. del Calc.
46-47 . . .	$(3a^2 \dots \dots (x$	
51-57 . . .	$10(a+ab^{\frac{1}{2}}) \dots \dots 10(a+ab)^{\frac{1}{2}}$	
58-61 . . .	$x^2=6 \dots \dots x^2=8$	
63 . . .	di 6 di 8	
64-4 . di fon. . . .	$R(\sqrt[3]{c^3}) \dots \dots R(\sqrt[3]{ac^3})$	
70-13	$x=x \dots \dots x=x+x$	
6 . di fon. . . .	d'onde inoltre	
101 5-90 h. 4 . . .	nella pred. ipot	
	nell'equaz. del n.° gr.	
116-10 . . .	$a^2-b^2 \dots \dots a^2-b$	
5 . di fon. . . .	(aggiungendo) moltiplica-	
	do $\sqrt{-1}$ a $\sqrt{-3}$;	
140-3 . . .	$x>0 \dots \dots x=0$	
4	$(-1)^2>0 \dots \dots (-1)^2<0$	
141-2	lire soldi	
158-12 e 13 . . .	$(m-m)a \dots \dots ma$	
15 . . .	$m, 3, 4, 5, 6 \dots \dots m, 3, 4, 5, 7$	
19 . . .	$(147 \text{ m}^2 \text{ l}) \dots \dots (150 \text{ m}^2 \text{ l})$	
164-116	$\frac{1-x^2}{1-x} \dots \dots \frac{1}{1-x}$	
173-14 . . .	$\cos DCF \dots \dots \cos GDF$	
183-13 . . .	178 n.° II 119	
21 . . .	$3\frac{1}{4} \dots \dots 168$	
180-8	$\frac{c}{x}, \frac{c}{y} \dots \dots \frac{d}{x}, \frac{d}{y}$	
187-9	$(1C)^2 \dots \dots (C)^2$	
195-7 di fon. . . .	QACANR Q'QAPR	

285-15	...	α^2 IV	...	α^2 III
293-16	...	$\sqrt{ax-x^2}$	...	$\sqrt{x-x^2}$
301-7	$\int$	$y \cos x + \alpha$	...	$x \cos x + \alpha$
		$x \sin x + \beta$	...	$y \sin x + \beta$
305-9	:	quadrato	...	diviso
307-1	:	Fig. 147	...	Fig. 17





20



21



22



23



24



294003





8.21.2.22





